

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Fakulta informatiky a aplikované matematiky

ing. Milan Guštar

**MODERNÍ METODY SIMULACE SYSTÉMŮ
METODA SBRA**

Disertační práce

Praha, 2002

Table of Contents

Poděkování.....	v
Abstrakt.....	vi
Abstract.....	vii
1 Úvod.....	1
2 Simulační metody.....	3
2.1 Modely.....	3
2.2 Simulace.....	4
2.3 Náhodné veličiny.....	5
2.3.1 Typy náhodných veličin.....	7
2.3.2 Reprezentace náhodných veličin.....	9
2.3.2.1 Distribuční funkce.....	9
2.3.2.2 Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnostní funkce.....	11
2.3.2.3 Kvantilová funkce.....	13
2.3.3 Statistiky a charakteristiky náhodných veličin.....	14
2.3.4 Omezená rozdělení.....	14
2.3.5 Histogram.....	17
2.4 Generátory náhodných čísel.....	20
2.4.1 Primární generátor.....	21
2.4.1.1 Fyzikální generátory.....	21
2.4.1.2 Tabulky náhodných čísel.....	21
2.4.1.3 Generátory pseudonáhodných čísel	22
2.4.1.4 Kombinované generátory.....	25
2.4.2 Generování obecných rozdělení.....	27
2.4.3 Testování generátorů.....	30
2.5 Metoda Monte Carlo.....	32
2.5.1 Historie metody Monte Carlo.....	32
2.5.2 Přesnost výsledků.....	33
2.5.3 Metody snížení rozptylu.....	35
2.5.3.1 Výběr podle důležitosti.....	36
2.5.3.2 Oblastní výběr.....	37
2.5.3.3 Metoda řídicích proměnných.....	38
2.5.3.4 Metoda Latin hypercube.....	39
2.5.3.5 Metody kvazi-Monte Carlo.....	40
2.5.4 Typické úlohy řešené metodou Monte Carlo.....	40
2.5.4.1 Deterministické úlohy.....	40
2.5.4.2 Stochastické úlohy.....	43
3 Metody pro určování spolehlivosti konstrukcí.....	45
3.1 Deterministické metody.....	46

3.2	Polopravděpodobnostní metody.....	47
3.3	Pravděpodobnostní metody.....	48
3.3.1	Analytické metody.....	49
3.3.2	Simulační metody.....	51
4	Metoda SBRA.....	53
4.1	Základní principy metody SBRA.....	53
4.2	Model.....	55
4.3	Vstupní veličiny.....	58
4.4	Spolehlivostní funkce.....	62
5	Anthill – program pro určování spolehlivosti konstrukcí metodou SBRA.....	65
5.1	Základní struktura programu Anthill.....	65
5.2	Vstupní náhodné veličiny.....	66
5.2.1	Primární generátor.....	67
5.2.2	Diskrétní rozdělení.....	68
5.2.2.1	Diskrétní rozdělení – 16 bitová verze.....	70
5.2.2.2	Diskrétní rozdělení – 32 bitová verze.....	71
5.2.3	Po částech rovnoměrné rozdělení.....	72
5.2.4	Teoretická rozdělení.....	74
5.2.5	Generování závislých veličin.....	75
5.3	Model.....	75
5.4	Spolehlivostní funkce.....	76
5.5	Výstupní proměnné.....	77
5.5.1	Numerické hodnoty.....	78
5.5.2	Histogram.....	80
5.5.3	Záznam.....	81
6	Další vývoj metody SBRA.....	83
6.1	Výpočetní složitost metody SBRA.....	83
6.1.1.1	Primární generátor náhodných čísel.....	84
6.1.1.2	Generátor rozdělení.....	84
6.1.1.3	Model.....	84
6.1.1.4	Ukládání výsledků.....	84
6.1.1.5	Závislost počtu simulačních kroků na požadované přesnosti.....	85
6.1.2	Možnosti řešení rozsáhlých modelů.....	85
6.2	Využití objektových metod.....	86
6.2.1	Příklad objektového řešení.....	87
6.2.1.1	Primární generátor náhodných čísel.....	87
6.2.1.2	Generátor rozdělení.....	87
6.2.1.3	Model.....	88
6.2.1.4	Ukládání výsledků.....	88

6.2.1.5Příklad simulace.....	89
6.3Příprava programů a návaznost na existující specializované programy.....	90
Shrnutí a závěry.....	91
Příloha A – Statistiky a charakteristiky náhodných veličin.....	93
Momenty.....	93
Střední hodnota, průměr.....	94
Medián.....	94
Modus.....	95
Rozptyl.....	95
Směrodatná odchylka.....	96
Variační koeficient.....	96
Šikmost.....	97
Špičatost.....	98
Kvantil.....	99
Kovariance a korelace.....	100
Příloha B – Historie metody SBRA.....	102
1987-1990 Řešení dílčích problémů.....	102
Popis vstupních náhodných veličin.....	102
Rozbor účinků kombinace zatížení.....	102
Vyšetřování a definice odolnosti	102
1991-1992 Výpočet pravděpodobnosti poruchy.....	103
1993-1998 Vícekomponentní problémy.....	103
1998-2000 Programy pro MS-Windows.....	103
2001-2002 Příprava k řešení rozsáhlých systémů.....	104
Příloha C – Programy vytvořené v rámci metody SBRA.....	105
ResCom.....	105
Analýza kombinace zatížení.....	105
LoadCom.....	111
Parametrická studie – kombinace zatížení podle různých norem.....	113
DamAc.....	117
Akumulace poškození dřevěného prvku.....	118
MatCom.....	120
Odolnost složeného prvku.....	120
M-Star.....	123
Pravděpodobnost selhání ocelového prvku.....	123
Anthill.....	125
Pravděpodobnost selhání ocelového prvku.....	125
Anthill pro Windows.....	126
Pravděpodobnost selhání ocelového prvku.....	127

Příloha D – Testování generátoru.....	129
Testování primárního generátoru.....	129
Délka periody.....	129
Rovnoměrnost rozdělení.....	129
Seriální korelace.....	131
Shrnutí výsledků testů primárního generátoru.....	135
Testování generátoru obecného diskrétního a po částech rovnoměrného rozdělení...	136
Posouzení kvality aproximace.....	136
Použitá literatura.....	141
Vybrané publikace.....	145

Poděkování

Předložená práce shrnuje výsledky mé dlouhodobé činnosti zaměřené na tvorbu, rozvoj a aplikace metody SBRA, která vznikla během čtrnáctileté inspirující spolupráce s prof. Ing. Pavlem Markem, DrSc., kterému děkuji za trpělivé uvádění do problematiky posuzování spolehlivosti stavebních konstrukcí i za dlouhodobé přátelské povzbuzování a rady. Předkládaná disertační práce byla vytvořena v rámci mého doktorského studia na Fakultě informatiky a aplikované matematiky VŠB TU Ostrava pod vedením prof. Ing. Ivo Vondráka, CSc., kterému děkuji za veškerou podporu a rady týkající se zejména moderních programovacích technik. Děkuji zároveň prorektorovi prof. Ing. Tomáši Čermákovi, CSc. a prof. RNDr. Zdeňkovi Dostálovi, CSc. za rady a připomínky k mezioborovým aspektům práce. Mé poděkování zaslouží rovněž RNDr. Pavel Popela, Ph.D. ze Strojní fakulty VUT Brno, který mi ochotně poskytl v průběhu posledních šesti let možnost konzultovat problémy matematicko-simulačního aparátu metody SBRA. Děkuji také pracovníkům Ústavu teoretické a aplikované mechaniky Akademie věd České republiky v Praze a Stavební fakulty San Jose State University v Kalifornii a všem dalším, kteří přispěli k dosaženým výsledkům, shrnutým v práci předložené k obhajobě.

Autor

Abstrakt

Předložená práce se zabývá aplikací a implementací simulačních metod v rámci návrhu a rozvoje původní metody SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment) pro posuzování spolehlivosti konstrukcí. Práce seznamuje se základními principy metody SBRA a ukazuje možnosti aplikace metody při posudku spolehlivosti konstrukcí. Způsob implementace navržených postupů je dokumentován popisem programu Anthill pro Windows. Práce shrnuje dosavadní vývoj metody SBRA a naznačuje možný směr jejího dalšího vývoje a rozšiřování.

Návrh konstrukcí vyžaduje mimo jiné i nástroje pro určování bezpečnosti, únosnosti a trvanlivosti konstrukcí. Omezená kapacita donedávna dostupných výpočetních prostředků dovolovala použití pouze výpočetně nenáročných metod. Teprve rychlý rozvoj a všeobecná dostupnost informačních technologií a výpočetní techniky vytváří předpoklady k přechodu k pravděpodobnostnímu pojetí posudku spolehlivosti konstrukcí, přičemž významným prvkem je využití simulačních technik.

K pravděpodobnostním metodám využitelným v projekční praxi patří metoda SBRA. Tato metoda byla vytvořena s cílem využít dostupných osobních počítačů ke kvalitativnímu zdokonalení posudku spolehlivosti konstrukcí. Její aplikace umožňuje přechod od deterministického k pravděpodobnostnímu pojetí posudku spolehlivosti. Řešení velkého množství příkladů z různých oblastí posudku spolehlivosti metodou SBRA a zkušenosti z přednášek, seminářů a diskusí s projektanty ukazují, že navržená metoda je akceptována uživateli jako srozumitelný, výkonný, mnohostranný a prakticky použitelný nástroj.

V rámci metody SBRA je určována pravděpodobnost poruchy v souladu s koncepcí mezních stavů. Pomocí transformačního modelu jsou vstupní náhodné veličiny, jako zatížení, mechanické a geometrické vlastnosti konstrukce atd. transformovány na výstupní veličiny, vyjadřující složky účinků zatížení a odolnosti. Simulací Monte Carlo je získáno empirické rozdělení výstupních veličin. Na základě vyhodnocení spolehlivostní funkce, rozděluje prostor výstupních veličin na bezpečnou oblast a oblast poruchy, lze určit pravděpodobnost poruchy, jež je základním ukazatelem spolehlivosti konstrukce.

V současnosti lze metodu SBRA použít pro pravděpodobnostní posudek prvků, dílců a jednoduchých konstrukčních soustav. Zvyšující se výkon dostupných výpočetních prostředků a rozvoj numerických metod vytváří předpoklady pro rozšíření metody na řešení rozsáhlých systémů. To bude vyžadovat rozšíření použitých programů o nové vlastnosti a funkce a začlenění těchto programů do rozsáhlejších systémů, dovolujících spolupráci se specializovanými programy pro řešení dílčích problémů, jako je analýza konstrukcí, řešení soustav rovnic a pod.

Při přechodu k použití pravděpodobnostních metod bude třeba věnovat pozornost celkovému pravděpodobnostnímu pojetí spolehlivosti konstrukcí. Současně bude třeba vytvořit nový ucelený systém norem, zahrnující databáze vstupních dat, specifikaci použitých výpočetních postupů, atd.

Abstract

This Thesis pertains to the application and implementation of simulation methods in the design and development of SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment), method, an original method devised for reliability assessment of structures. The Thesis describes basic principles of the SBRA method and shows its application to the reliability assessment process. Description of the program Anthill for Windows displays the implementation of proposed procedures. The Thesis also summarises the status of the SBRA method and shows a possible way of for its further development.

The design of structures requires among others things the tools for the assessment of safety, bearing capacity, and durability of the structures. Limited capacity of until recently available computational tools allowed the use of computationally simple methods. Only the fast development and widespread availability of computers and information technologies provide prerequisites for the transition to the probabilistic concept of the reliability assessment of structures with the important role of utilising simulation techniques.

SBRA is a probabilistic method applied in a design praxis. The SBRA method was created to use available personal computers for a qualitative improvement of the reliability assessment of structures. Its application allows transitioning from the deterministic to probabilistic concept of reliability assessment. The solution of numerous examples from the various branches of reliability assessment using the SBRA method and experience from lectures, seminars, and discussion with designers shows that the proposed method is acceptable to users as a comprehensible, powerful, versatile, and applicable tool.

With the SBRA method the probability of failure is estimated according to the limit states concept. With the use of the transformation model the input variables, such as loadings, mechanical, and geometrical properties, etc., are transformed to output variables representing the components of load effects and resistance. Using the Monte Carlo Simulation, the empirical distribution of output variables is obtained. Following the evaluation of the reliability function, dividing the space of the output variables to the safe and the failure regions, the probability of failure as the main measure of the structure's reliability can be estimated.

Currently the SBRA method may be used for probabilistic reliability assessment of members, parts, and simple structures. Increasing the power of available computers and the development of numerical methods allows for the expansion of the SBRA method for the solution of large systems. It will require the addition of new features and functionality to the programs and to include these programs into larger systems for co-operation with specialised programs for the solution of particular problems such as the analysis of the structures, solution of the systems of equations, etc.

With the transition to application of probabilistic methods it will be necessary to pay attention to the overall probabilistic concept of the reliability assessment of structures. Simultaneously it will be necessary to create a completely new system of standards and design codes with databases of input data, specification of computational techniques, etc.

Předkládaná práce je zaměřena na aplikaci a implementaci simulačních metod v rámci návrhu a rozvoje metody SBRA – původní metody pro určování spolehlivosti konstrukcí. Práce shrnuje podstatu metody a její základní principy a uvádí návrh směru dalšího vývoje a rozšiřování metody. Práce podává přehled programů vyvinutých v rámci metody SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment) s ukázkami jejich použití při posudku spolehlivosti konstrukcí. Na příkladě programu Anthill pro Windows ukazuje základní principy použité pro efektivní implementaci metody na osobních počítačích standardu IBM-PC.

Efektivní návrh spolehlivých a ekonomických konstrukcí vyžaduje mimo jiné i nástroje pro určování bezpečnosti, únosnosti a trvanlivosti konstrukcí. Omezená kapacita výpočetních nástrojů doby před zavedením počítačů neumožňovala extenzivní numerickou analýzu a toto omezení dovolilo jen jednoduchou, deterministickou analýzu bezpečnosti a spolehlivosti konstrukcí. Postupný vývoj informačních technologií a výpočetní techniky vedl k přechodu od grafických a jednoduchých numerických metod návrhu konstrukcí k propracovaným numerickým metodám, jako je např. metoda konečných prvků. Vývoj výpočetní techniky dovolil zavedení komplexních, rychlých a přesných metod CAD také do oblasti návrhu a projektování konstrukcí. V oblasti posuzování spolehlivosti konstrukcí je však většina postupů stále založena na aplikaci metod vyvinutých v době jednoduchých výpočetních prostředků. Tomu odpovídá i obsah současných norem a dalších závazných dokumentů, jejichž formát se od dob jejich vzniku podstatně nezměnil. Zatímco rozsah těchto dokumentů rychle narůstá vlivem vývoje a zpřesňování použitého formalizmu, jejich obsah stále odpovídá době před použitím počítačů. Odstranění nesouladu mezi možnostmi současné výpočetní techniky a používanými metodami pro posuzování spolehlivosti vyžaduje změnu celého procesu posuzování spolehlivosti. Významnou úlohu v tomto procesu může mít i zavádění simulačních metod. Revidovaná norma [16] jako jedna z prvních na světě již umožňuje uplatnění plně pravděpodobnostní koncepce při posuzování spolehlivosti konstrukcí.

Nevelký výkon donedávna dostupných výpočetních prostředků – matematických tabulek, logaritmických pravítek, mechanických a později elektronických kalkulátorů dovoľoval použití pouze výpočetně nenáročných metod. Proto nejstarší deterministické metody zcela zanedbávají náhodný charakter vstupních veličin [62]. Metody polopravděpodobnostní vyjadřují vliv náhodnosti zaváděním korekčních koeficientů do modelu, který nadále zůstává modelem deterministickým [62]. Pravděpodobnostní metody, založené na analytickém řešení, zavádějí zjednodušující předpoklady jak na straně vstupních náhodných veličin, tak na straně výpočetního modelu [31, 32, 7, 19]. Teprve rozvoj výpočetní techniky a informačních technologií umožňuje rychle a efektivně zpracovávat velké množství dat, což spolu s dostupností výkonných osobních počítačů vytváří předpoklady k přechodu k plně pravděpodobnostnímu pojetí posudku spolehlivosti konstrukcí. Významným prvkem v pravděpodobnostním posudku spolehlivosti je využití simulačních technik, které dovolí přehledně posuzovat situace, o kterých se předchozí metody nezmiňovaly (např. kombinace vícekomponentních účinků zatížení) a umožní plně využít tvůrčí a expertní potenciál projektanta [80, 39, 9, 49]. Aplikace simulačních metod s využitím výkonných osobních počítačů může být v mnoha případech efektivnější než použití metod konvenčních.

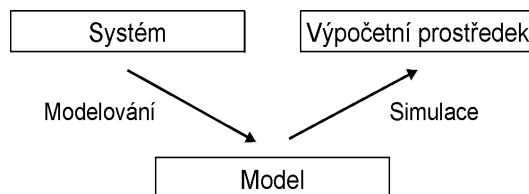
K pravděpodobnostním metodám, které lze aplikovat v projekční praxi, patří metoda SBRA. Tato metoda je vyvíjena od roku 1987, byla publikována v desítkách článků a prezentována na mnoha odborných konferencích (viz např. vybrané publikace uvedené v závěru této práce a seznamy publikací uvedené v [54], [50] a [55]). Dosažené výsledky byly souborně zpracovány a publikovány knižně v letech 1995 [54], 1998 [55] a 2001 [50].

Metoda SBRA byla vytvořena s cílem využít dostupných osobních počítačů ke kvalitativnímu zdokonalení posudku spolehlivosti konstrukcí. Její aplikace umožňuje přechod od deterministického k pravděpodobnostnímu pojetí posudku spolehlivosti. Zkušenosti z přednášek, seminářů a diskusí s projektanty ukazují, že navržená metoda je akceptovaná uživateli jako srozumitelný a výkonný nástroj.

Předložená práce je založena na výsledcích patnáctiletého vývoje metody SBRA. V úvodní kapitole jsou popsány důvody vzniku popsané metody a cíle předložené práce. V kapitole 2 jsou shrnuty základní pojmy a principy z oblasti modelování, simulace, teorie pravděpodobnosti a statistiky. Pozornost je věnována typům a vlastnostem náhodných veličin, generátorům náhodných čísel a metodě Monte Carlo. V kapitole 3 jsou stručně shrnuty základní metody pro určování spolehlivosti konstrukcí, což umožňuje jejich porovnání s dále popsanou metodou SBRA. Kapitola 4 je věnována metodě SBRA. Jsou zde vysvětleny základní principy metody, podán přehled modelů a veličin používaných při určování spolehlivosti konstrukcí a popsán postup určení pravděpodobnosti poruchy na základě vyhodnocení spolehlivostní funkce. V kapitole 5 je popsána struktura programu Anthill pro určování spolehlivosti metodou SBRA. Jsou zde popsány hlavní části programu s příklady konkrétní implementace. Kapitola 6 je věnována dalšímu předpokládanému vývoji metody SBRA. Závěr shrnuje současný stav a naznačuje možnosti dalšího rozvoje metody. Příloha A podává přehled nejdůležitějších statistik a charakteristik náhodných veličin. V příloze B je stručně shrnuta historie vývoje metody SBRA. Příloha C popisuje programy vytvořené v rámci metody SBRA. Popis programů je doplněn příklady jejich aplikace. Příloha D obsahuje výsledky některých provedených testů použitých generátorů náhodných čísel.

2 Simulační metody

Simulace je na pomezí teorie systémů, teorie automatů a pod. [87]. V rámci modelování a simulace lze najít tři základní typy prvků: *systém*, *model* a *výpočetní prostředek*. Tyto prvky jsou spojeny dvěma základními vztahy: *modelováním*, zabývajícím se především vztahem mezi systémy a modely a *simulací*, jež se zabývá především vztahem mezi modely a výpočetními prostředky, viz obrázek 2.1.



Obr. 2.1: Systém, model, výpočetní prostředek

Systém je sledovaná část reálného světa, přirozená nebo umělá, existující nebo plánovaná. Tento systém je potenciálním zdrojem sledovaných dat. V případech kdy není možné nebo vhodné získávat data na základě experimentů prováděných na původním systému je vytvářen model a data jsou získávána z tohoto modelu na základě simulace. Výpočetní prostředek je potom zařízení (člověk nebo stroj) schopné produkovat data na základě předpisu daného modelem. Celý proces modelování a simulace lze považovat za specifický případ návrhu a tvorby informačního systému, jehož úkolem je studium jiného systému [24].

2.1 Modely

Pojem model je jedním ze základních pojmů v simulaci. Termín sám pochází z latinského slova *Modus*, *Modulus* ve významu míra, mez, omezení, rytmus, vzor, forma, způsob a pod. Ačkoli přibližný význam slova model je všeobecně známý, je přesné vymezení jeho významu obtížné a v literatuře značně nejednotné. Modelem může být diagram nebo uspořádání demonstrující nějaké aspekty chování modelovaného systému. Pro účely simulace lze model chápat jako předpis pro získávání dat.

Někdy se model od modelovaného systému liší jen měřítkem. Například akustické vlastnosti místnosti mohou být zkoumány na zmenšeném modelu s použitím ultrazvukových vln s úměrně zmenšenou délkou vlny oproti původnímu zvuku. V jiných modelech dochází ke konceptuálnímu posunu [6]. Příkladem může být modelování mechanických systémů elektrickými obvody. Mechanické veličiny jako síla, rychlost, tlumení a pod. jsou reprezentovány veličinami elektrickými jako napětí, proud odpor, kapacita atd. [78]. Mnoho systémů lze popsat pomocí matematických modelů, to je soustav matematických rovnic [35]. V následujícím textu je pod pojmem model míněn matematický model, pokud není uvedeno jinak.

Modely je možné třídit v závislosti na požadavcích jednotlivých oborů, problémů a pod. [65] podle velkého množství hledisek, z nichž některá jsou uvedena dále. Pokud v modelu není obsažen čas jedná se o modely statické, v ostatních případech

jde o modely dynamické. Podle pojetí plynutí času v modelu, lze definovat modely se spojitým časem, v nichž čas plyne spojitě, a modely s diskretním časem, kde se čas mění po skocích. Podle typu vnitřních proměnných lze rozlišovat modely se spojitými stavy, u nichž vnitřní proměnné mohou nabývat hodnot ze spojitých intervalů, a modely s diskretními stavy, u nichž vnitřní proměnné nabývají pouze diskretních hodnot. Pokud model obsahuje náhodné proměnné, hovoříme o stochastickém modelu, pokud se v modelu náhodné veličiny nevyskytují, je model deterministický. V případě, že se parametry modelu nemění v čase, je model časově invariantní, v opačném případě je model časově proměnný. Podle vztahu modelu k okolí lze rozlišit modely autonomní, u kterých nemá okolní prostředí na model vliv, a modely neautonomní, jejichž některé proměnné jsou okolím ovlivňovány. Z hlediska realizace modelu rozlišujeme modely hmotné a modely abstraktní (matematické). Matematické modely lze dále rozdělit na analytické a numerické.

Modely jsou vytvářeny na základě určitých znalostí nebo předpokladů o vlastnostech reálného systému. Podle vztahu mezi modelem a systémem lze hodnotit validitu modelů. O replikativně validním modelu hovoříme, pokud odpovídá datům získaným z modelovaného systému. Prediktivně validní je model, jehož vnější chování odpovídá modelovanému systému. Strukturálně validní model odráží způsob vnitřního chování systému [67].

Pro tvorbu modelů zřejmě nelze stanovit přesná pravidla. Proto bývá někdy modelování řazeno spíše k umění než k vědě [65]. Pro určitý systém lze vytvořit velké množství různých modelů. Z nich je třeba vybrat ten nejvhodnější pro řešení daného problému. Model nesmí být příliš složitý, aby byl prakticky použitelný. Nemusí se v každém směru podobat modelovanému systému, ale musí věrně vystihovat ty jeho vlastnosti, které jsou důležité pro řešení dané úlohy [74].

2.2 Simulace

Simulace je experiment prováděný na modelu namísto na reálném systému. Účelem provádění simulací je zjistit chování reálného systému na základě analýzy dat získaných simulací.

Experimenty se provádějí na modelu namísto na reálném systému obvykle proto, že reálný experiment nelze provést z důvodů omezení, týkajících se velikosti, času, ceny nebo rizika spojeného s prováděním reálných experimentů. Reálný experiment se může týkat struktur extrémně rozměrných, příliš malých nebo fyzicky nedostupných, sledované jevy mohou probíhat příliš pomalu nebo příliš rychle, experiment může být velice drahý nebo prakticky neopakovatelný, případně může být spojen s riziky vzniku škod na zdraví nebo majetku a pod. Dalším důvodem simulace může být potřeba srovnání výsledků získaných z reálných experimentů s výsledky získanými z modelu. Případné nesrovnalosti mohou pomoci korigovat jak vlastnosti použitého modelu tak i předpoklady o chování reálného systému.

Simulace může být deterministická nebo stochastická. V případě stochastické simulace mají některé objekty, jevy nebo procesy náhodný aspekt. Z tohoto důvodu není při stochastické simulaci vše předvídatelné. Právě z této nepředvídatelnosti plyne potřeba hodnocení míry rizik a spolehlivosti. Prvek náhodnosti obsahují všechny reálné systémy.

Pokud náhodnost není z hlediska cíle modelování významná, lze náhodné veličiny považovat za deterministické, což může dovolit zjednodušení modelu nebo simulace. Zanedbání významných náhodných vlivů může ovšem vést k podstatným chybám. V případě kdy mají všechny objekty, jevy a procesy deterministický charakter hovoříme o deterministické simulaci.

Z hlediska vztahu modelu a výpočetního systému (počítače) je simulace realizací instrukcí daných modelem. Správnost a přesnost této realizace je mírou korektnosti programu.

2.3 Náhodné veličiny

Zkušenosti s nestabilními a nepřesnými vlastnostmi reálných systémů ukazují, že deterministické, přesné předvídání jejich vlastností bývá zřídka možné. Pokud při opakování pokusů dostáváme za stejných podmínek různé výsledky, které od sebe umíme jasně odlišit a pokud dokážeme úplně určit množinu všech možných výsledků, lze neurčitost výsledků modelovat pravděpodobnostně. Pokud jsou navíc četnosti stejných skupin výsledků obdobné v různých sériích pokusů a chování pravděpodobnostního modelu se při pokusech opakuje (hromadnost), lze použít informace získané na základě minulých pokusů k předpovídání četností výsledků pokusů budoucích.

Náhodným jevem rozumíme tvrzení o výsledku pokusu, o kterém lze po uskutečnění pokusu rozhodnout, zda při dané realizaci pokusu je či není pravdivé [46]. Abychom mohli náhodné jevy zkoumat, předpokládáme, že sérii pokusů lze za stejných podmínek mnohokrát (teoreticky neomezeně) opakovaně realizovat.

Teorie pravděpodobnosti, zabývající se analýzou náhodnosti, se začala rozvíjet v sedmáctém století při zkoumání hazardních her. V počátcích vývoje teorie pravděpodobnosti bylo na základě konkrétních pokusů vytvořeno několik "definic" pravděpodobnosti. Klasická definice pravděpodobnosti [46], formulovaná P. Laplacem, je založena na existenci konečného počtu n různých, vzájemně se vylučujících, stejně možných elementárních jevů, výsledků nebo stavů procesu. Potom lze pravděpodobnost definovat jako

$$P[A] = \frac{m}{n} \quad /2.3.1/$$

kde m je počet příznivých elementárních jevů a n je celkový počet elementárních jevů. Tato "definice" předpokládá znalost pojmu "stejná možnost", který není jinde definován a je omezena též konečným počtem elementárních jevů.

Zobecněním předchozího přístupu lze pojem počet nahradit vhodně volenou mírou, kterou může být délka, plocha a pod. Pravděpodobnost volby prvku z podmnožiny A množiny Ω je potom definována jako

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad /2.3.2/$$

kde $|A|$ a $|\Omega|$ jsou zvolené míry na množině Ω a její podmnožině A . Vztah /2.3.2/ je nazýván geometrickou definicí pravděpodobnosti [29]. I použitelnost této "definice" je omezena z analogických důvodů jako "definice" předchozí.

Na základě sledování relativních četností výskytů jevů a jejich závislosti na počtu pokusů vytvořil R. von Mises statistickou definici pravděpodobnosti [29]. V tomto případě je pravděpodobnost jevu A definována jako limita relativních četností při rostoucím počtu pokusů, což lze symbolicky (matematicky nepřesně) vyjádřit

$$P[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} \quad /2.3.3/$$

Takto pojatou "definici" pravděpodobnosti lze použít i v mnoha situacích v nichž nejsou splněny předpoklady žádné z předchozích dvou definic, především "stejná možnost" elementárních jevů. Ani tato "definice" však není matematickou definicí pravděpodobnosti.

Všechny uvedené "definice" byly vytvořeny ve snaze vymezit význam a interpretovat pojem pravděpodobnost [46]. S rozvojem teorie pravděpodobnosti docházelo ke zobecňování a přesnějšímu vymezení základních pojmů a rozšiřování celého systému. Se zvyšováním složitosti řešených úloh vznikla potřeba vytvořit obecnou teorii, zabývající se pravděpodobností jako matematickým objektem. Aby byla zaručena vnitřní bezrozpornost tohoto systému, byl s použitím teorie množin a teorie míry vybudován axiomatický systém teorie pravděpodobnosti [75, 29, 68]. Základy tohoto systému vytvořil začátkem dvacátého století A. N. Kolmogorov. Celý systém je založen na základních axiomech, z nichž lze další zákony a vlastnosti pravděpodobnosti odvodit deduktivní cestou.

Při zkoumání náhodných jevů je obvykle vhodné přiřadit těmto jevům reálná čísla. Máme-li prostor elementárních jevů Ω a σ -algebru A jeho podmnožin (jevové pole), pak jednotlivým podmnožinám A , nazývaným náhodné jevy, přiřazujeme určité pravděpodobnosti pomocí pravděpodobnostní míry P . Pravděpodobnostní prostor (Ω, A, P) , lze pomocí měřitelné funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, nazývané náhodná veličina, "přenést" na reálnou osu a vytvořit pravděpodobnostní prostor (\mathbb{R}, B, Q) , kde \mathbb{R} je množina reálných čísel, B je systém borelovských podmnožin (borelovské jevové pole) a Q je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny X [3].

V matematické statistice má důležité postavení pojem náhodný výběr, který spojuje mnoho teoretických výsledků s praktickými situacemi [3]. Náhodným výběrem rozumíme posloupnost stejně rozdělených náhodných veličin X_1, \dots, X_n . Číslo n nazýváme rozsah výběru.

Náhodnou veličinu

$$\bar{X} = m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad /2.3.4/$$

nazýváme výběrovým průměrem a veličinu

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad /2.3.5/$$

případně (pro $n \geq 2$)

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad /2.3.6/$$

nazýváme výběrovým rozptylem.

Pro náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2 platí [4]

$$E \bar{X} = \mu \quad /2.3.7/$$

$$\text{var } \bar{X} = \frac{\sigma^2}{n} \quad /2.3.8/$$

$$E S^2 = \sigma^2 \quad /2.3.9/$$

kde E značí střední hodnotu a var rozptyl. Z /2.3.7/ lze usuzovat, že \bar{X} kolísá kolem hodnoty μ a podle /2.3.8/ toto kolísání klesá s rostoucím n . Obdobně podle /2.3.9/ S^2 kolísá kolem hodnoty σ^2 . To umožňuje použít hodnot \bar{X} a S^2 jako odhadů pro μ a σ^2 pokud hodnoty μ a σ^2 nejsou známy. V případě vztahů /2.3.7/ a /2.3.8/ hovoříme o nestranných odhadech [3].

2.3.1 Typy náhodných veličin

Veličiny lze rozdělit na tři typy: atributy, počty, a míry [22]. Atributy jsou vlastnosti, které jednotlivé vzorky buď mají nebo nemají. Počty udávají množství vzorků, které mají daný atribut. Míry jsou jednoduché číselné hodnoty jako rozměry, hmotnosti, rozsahy nebo velikosti. Atributy a počty jsou diskrétní a míry jsou spojité veličiny. Podobně lze rozdělit i typy náhodných veličin.

Většina náhodných veličin patří k jednomu ze dvou základních typů. Pokud náhodná veličina X může nabýt pouze hodnot z konečné nebo nekonečné spočetné množiny $\{x_1, x_2, \dots\}$, říkáme, že veličina X má rozdělení diskrétního typu. Pokud může náhodná veličina X nabýt všech hodnot z určitého intervalu, jde zpravidla o rozdělení spojitěho typu [46].

Příkladem diskrétní náhodné veličiny jsou čísla získaná házením hrací kostkou. Ta mohou nabývat pouze hodnot z množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$, přičemž pravděpodobnost, že padne vybrané číslo, je pro všechna hodnoty stejná a rovná $p = \frac{1}{6}$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pro } x \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.3.1.1/$$

Příkladem spojitého rozdělení je rozdělení rovnoměrné. Hustoty a pravděpodobnosti veličiny s rovnoměrným rozdělením je definována vztahy /2.3.1.2/ až /2.3.1.5/. Veličina s rovnoměrným rozdělením může nabývat libovolné hodnoty z intervalu (a,b), viz /2.3.1.2/, [a,b), viz /2.3.1.3/, (a,b], viz /2.3.1.4/, případně [a,b], viz /2.3.1.5/, přičemž všechny možné výsledky jsou rovnocenné. Rovnoměrné rozdělení je v dalším textu označováno $U(a,b)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a < x < b \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.3.1.2/$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a \leq x < b \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.3.1.3/$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a < x \leq b \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.3.1.4/$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.3.1.5/$$

V teorii pravděpodobnosti i matematické statistice má významnou roli normální (Gaussovo) rozdělení [46], označované $N(\mu, \sigma)$ nebo $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ je střední hodnota, σ je směrodatná odchylka a σ^2 je rozptyl. V dalším textu je použito označení $N(\mu, \sigma)$. Hustota pravděpodobnosti veličiny s normálním rozdělením je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]} \quad /2.3.1.6/$$

K významným rozdělením, používaným v teorii spolehlivosti, patří rozdělení exponenciální [28]. V následujícím textu je používáno jednoparametrické exponenciální rozdělení, označované $E(b)$, kde b je parametr s významem střední hodnoty. Hustota pravděpodobnosti veličiny s exponenciálním rozdělením je

$$f(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}} \quad /2.3.1.7/$$

Příkladem méně obvyklých typů rozdělení je po částech definované spojitě rozdělení po částech rovnoměrné, popsané v kapitole 5.2.3. Toto rozdělení je používané v metodě SBRA pro aproximaci spojitých rozdělení. Příkladem smíšeného rozdělení, tvořeného kombinací diskrétního a spojitého rozdělení, je rozdělení doby t bezporuchového chodu nějakého zařízení. Pro $t > 0$ je rozdělení spojitě, pro $t = 0$ je jistá hodnota pravděpodobnosti, že se zařízení nepodaří spustit.

2.3.2 Reprezentace náhodných veličin

Pravděpodobnostní chování náhodných veličin lze popsat mnoha způsoby. K ucelenému popisu všech typů náhodných veličin lze použít distribuční funkce, z nichž lze odvodit další formy popisu. Z nich patří k nejobvyklejším pro svou názornost pravděpodobnostní funkce nebo funkce hustoty pravděpodobnosti, udávající s jakou pravděpodobností náhodná veličina nabývá určité hodnoty nebo hodnoty z určitého intervalu. Další velmi obvyklou formou je distribuční funkce, udávající pravděpodobnost, s jakou náhodná veličina nabývá nejvýše zadanou hodnotu. K dalším formám popisu patří charakteristická funkce nebo momentová vytvořující funkce [46]. Ve všech uvedených případech je k popisu náhodných veličin obvykle použito nějaké funkce vyjádřené v uzavřeném tvaru a jejích parametrů. Proto je tento způsob popisu možné označit za parametrický. V případě neparametrického popisu je rozdělení definováno pomocí splinů, polynomů, waveletů a pod. [77, 49].

2.3.2.1 Distribuční funkce

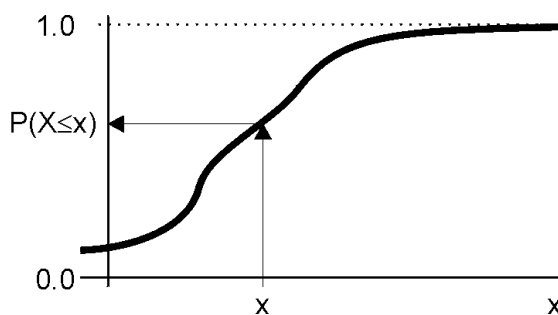
Distribuční funkce F náhodné veličiny je definována vztahem

$$F(x) = P[X \leq x] \quad /2.3.2.1/$$

Někdy lze nalézt i definici

$$F(x) = P[X < x] \quad /2.3.2.2/$$

V dalším textu bude užívána definice podle /2.3.2.1/. Distribuční funkce tedy udává pravděpodobnost s jakou náhodná veličina X nepřekročí zadanou hodnotu x , viz obrázek 2.3.2.2.



Obr.2.3.2.2: Distribuční funkce

Z definice distribuční funkce a vlastností pravděpodobnosti plyne, že

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad /2.3.2.3/$$

a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= F(-\infty) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= F(\infty) = 1 \end{aligned} \quad /2.3.2.4/$$

Z definice distribuční funkce a vlastností pravděpodobnosti dále plyne, že distribuční funkce je neklesající

$$F(x_1) \leq F(x_2) \text{ pro všechna } x_1 < x_2 \quad /2.3.2.5/$$

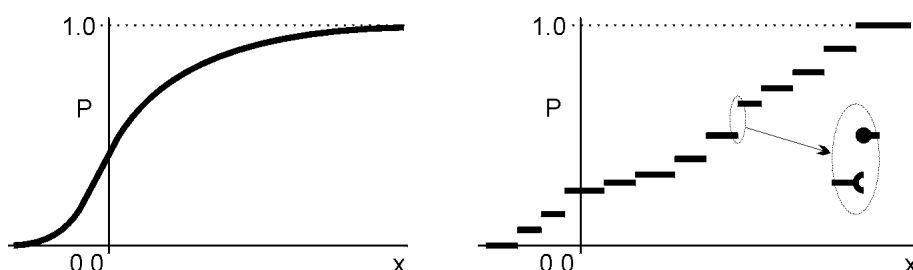
Distribuční funkce definovaná podle vztahu /2.3.2.1/ je zprava spojitá

$$F(x) = F(x^+) \quad /2.3.2.6/$$

Obdobně je distribuční funkce definovaná podle vztahu /2.3.2.2/ zleva spojitá

$$F(x) = F(x^-) \quad /2.3.2.7/$$

Výrazy $F(x^+)$ a $F(x^-)$ mají následující význam: $F(x^+) = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} F(x + \epsilon)$ a $F(x^-) = \lim_{0 < \epsilon \rightarrow 0} F(x - \epsilon)$. V případě spojitých náhodných veličin je distribuční funkce absolutně spojitá, v případě diskrétních veličin má distribuční funkce stupňovitý průběh s nejvýše spočetně mnoha body nespojnosti [33], viz obrázek 2.3.2.3.



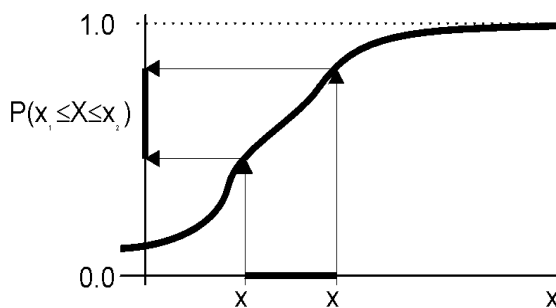
Obr. 2.3.2.3: Distribuční funkce spojitého a diskrétního rozdělení

Pro všechna $x_1 < x_2$ platí

$$P[x_1 < X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1) \quad /2.3.2.8/$$

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1^-) \quad /2.3.2.9/$$

To znamená, že pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina X nabývá hodnoty z intervalu $(x_1, x_2]$ nebo $[x_1, x_2]$, je rovna rozdílu hodnot distribuční funkce v bodech x_1 a x_2 , viz obrázek 2.3.2.4.

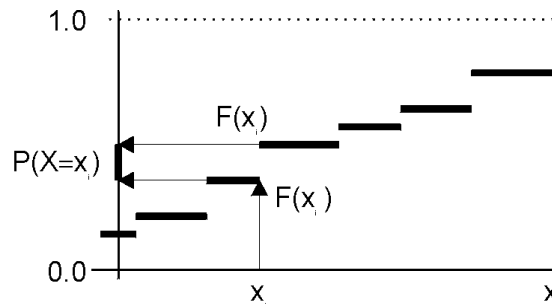


Obr.2.3.2.4: Spojitá distribuční funkce a pravděpodobnost

Pro všechna x platí

$$P[X = x] = F(x) - F(x^-) \quad /2.3.2.10/$$

Z toho plyne, že pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina X nabývá hodnoty x_i , je rovna velikosti skoku v bodě nespojitosti x_i , viz obrázek 2.3.2.5.



Obr.2.3.2.5: Diskrétní distribuční funkce a pravděpodobnost

Pro spojité rozdělení lze hodnoty distribuční funkce určit z funkce hustoty pravděpodobnosti $f(t)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad /2.3.2.11/$$

Pro diskrétní rozdělení lze hodnoty distribuční funkce určit z pravděpodobnostní funkce $f(t)$

$$F(x) = \sum_{-\infty}^x f(t) dt \quad /2.3.2.12/$$

Empirické distribuční funkce $F_n(x)$ lze získat ze vzorků n dat vzestupným seřazením jejich hodnot x_i a vytvořením stupňovité funkce se skoky na pozicích x_i s velikostmi $1/n$ a vodorovnými segmenty s délkami x_i . První segment je na pozici x_{min} a pro $x < x_{min}$ je $F_n(x) = 0$. Pro danou hodnotu x je počet skoků funkce $F_n(x)$ roven počtu n_x hodnot x_i , které jsou menší než x , tedy $F_n(x) = \frac{n_x}{n}$. Empirická distribuční funkce $F_n(x)$ pro velká n konverguje v pravděpodobnosti k distribuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X [68].

2.3.2.2 Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnostní funkce

Náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením lze charakterizovat hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, definovanou

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P[x \leq X \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \quad /2.3.2.13/$$

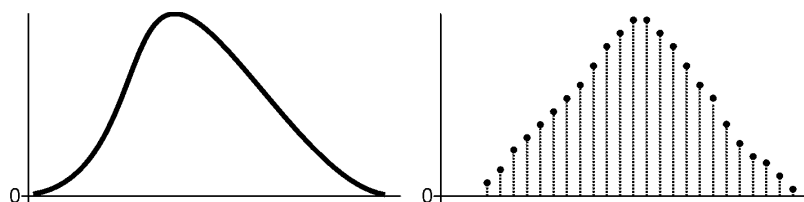
Pokud má náhodná veličina X spojitou distribuční funkci $F(x)$, pak ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, platí

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad /2.3.2.14/$$

Pro diskrétní náhodné veličiny hustotě pravděpodobnosti odpovídá pravděpodobnostní funkce nebo frekvenční funkce, definovaná

$$p(x) = \begin{cases} p_i = P[X = x_i] > 0 & \text{pro } x_i \in (x_1, x_2, \dots) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.3.2.15/$$

Náhodnou veličinu s diskrétním rozdělením lze tedy definovat výčtem hodnot x_i , kterých může nabývat, a pravděpodobnostmi p_i , s jakými jednotlivé hodnoty nabývá. Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnostní funkce jsou jednou z nejpřirozenějších, názorných forem popisu rozdělení náhodných veličin. V grafické formě podávají obraz o mnoha důležitých vlastnostech rozdělení, viz obrázek 2.3.2.6.



Obr. 2.3.2.6: Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnostní funkce

Z monotónnosti distribuční funkce $F(x)$ a vztahu /2.3.2.14/ plyne

$$f(x) \geq 0 \quad /2.3.2.16/$$

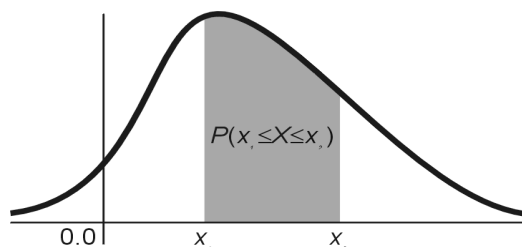
Ze vztahů /2.3.2.3/ a /2.3.2.5/ plyne, že plocha pod křivkou funkce hustoty pravděpodobnosti je rovna jedné

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad /2.3.2.17/$$

Ze vztahů /2.3.2.4/ a /2.3.2.5/ plyne, že pro všechna $x_1 < x_2$ platí

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad /2.3.2.18/$$

To znamená, že pravděpodobnost, že náhodná veličina X se spojitým rozdělením nabývá hodnot z intervalu $x_1 \leq X < x_2$ je rovna velikosti plochy pod křivkou funkce hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ mezi $x = x_1$ a $x = x_2$, viz obrázek 2.3.2.7.



Obr. 2.3.2.7: Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnost $P[x_1 \leq X < x_2]$

2.3.2.3 Kvantilová funkce

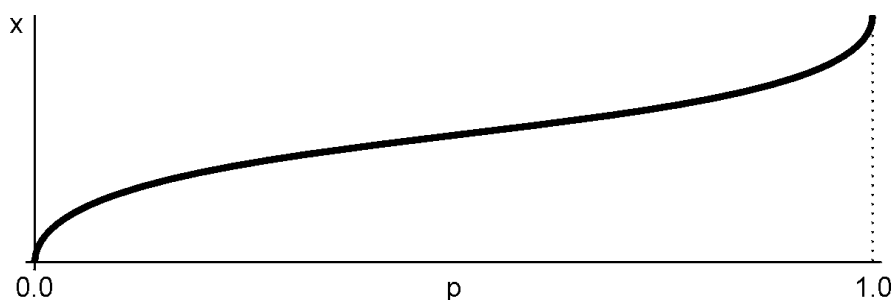
Inverzní distribuční funkce, zvaná také kvantilová funkce Q , definovaná vztahem

$$Q(p) = F^{-1}(p) \quad /2.3.2.19/$$

je další formou reprezentace náhodných veličin. Pomocí kvantilové funkce lze pro danou pravděpodobnost p najít odpovídající hodnotu p -kvantilu (viz dodatek A) x_p náhodné veličiny X , tj. platí $Q(p) = x_p$ a $F(x_p) = p$. Inverzní funkci lze vytvořit pouze ke spojitě, rostoucí distribuční funkci, tedy pouze pro spojitá rozdělení. V případě diskrétních a smíšených rozdělení existují intervaly na kterých je distribuční funkce konstantní a proto inverzní funkce F^{-1} neexistuje. Pro tyto případy je vhodné definici kvantilové funkce zobecnit

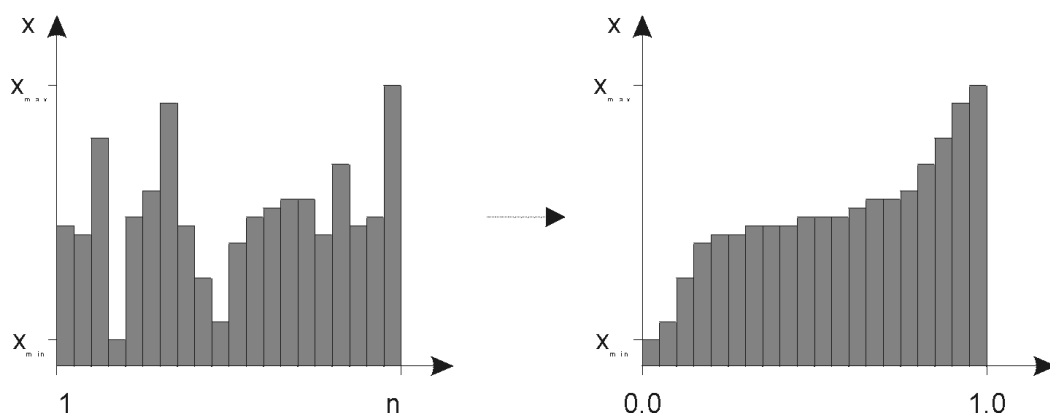
$$Q(p) = \inf \{x | F(x) \geq p\} \quad /2.3.2.20/$$

Potom je pro dané p hodnota x na intervalech, kde je funkce $F(x)$ rostoucí, rovna funkční hodnotě $F^{-1}(p)$ a na intervalech, kde je $F(x)$ konstantní, je hodnota x určena největší dolní závorou. Takto je funkce Q zleva spojitá na celém definičním oboru $(0;1]$. V případě potřeby definičního oboru $[0;1]$ lze funkci Q dodefinovat pro $p = 0$: $Q(0) = 0$.



Obr. 2.3.2.8: Kvantilová funkce

Empirické kvantilové funkce (Queteletovy funkce) [68] lze získat ze vzorků n dat vzestupným seříděním jejich hodnot x_i a vytvořením schodovité funkce se svislými segmenty s délkami x_i a vodorovnými segmenty s délkami $1/n$, viz obrázek 2.3.2.9.



Obr. 2.3.2.9: Konstrukce Queteletovy funkce

V metodě SBRA je kvantilová funkce pro zatížení označována jako křivka trvání zatížení (Load Duration Curve – LDC), jelikož reprezentuje trvání jednotlivých úrovní zatížení, viz kapitola 4.3.

2.3.3 Statistiky a charakteristiky náhodných veličin

Náhodné veličiny jsou plně definovány pomocí rozdělení, popsaného distribuční funkcí, pravděpodobnostní funkcí, hustotou pravděpodobnosti a pod. Mnohdy postačuje, nebo je i vhodnější, popsat hlavní vlastnosti náhodné veličiny několika číselnými hodnotami, sumarizujícími některé důležité vlastnosti náhodných veličin. Tyto hodnoty se nazývají charakteristiky náhodných veličin nebo charakteristiky rozdělení [46].

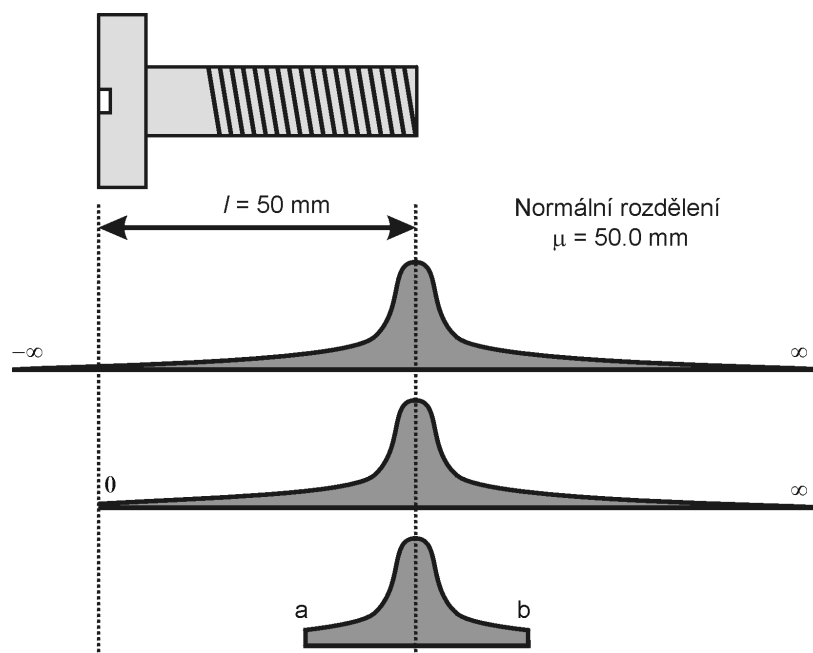
Podobně i množství informací, obsažené ve statistických vzorcích dat (náhodných výběrech ze základního souboru) většího rozsahu, je ve své celistvosti nesnadno obsáhnutelné. I v těchto případech lze hlavní vlastnosti datových souborů popsat číselnými hodnotami, které se v tomto případě nazývají statistiky [45].

Polohu "centra rozdělení", oblasti s nejvyšší koncentrací dat udávají charakteristiky polohy, k nimž patří střední hodnota, medián, modus, atd. Charakteristiky variability jako rozptyl, směrodatná odchylka a pod. udávají míru koncentrace nebo rozptýlenosti dat, "šířku" či "rozsah" rozdělení. Vztahy dvojic souborů a různé druhy závislostí popisují míry asociací, z nichž patří k nejvíce používaným kovariance a korelace. Přehled nejdůležitějších statistik a charakteristik náhodných veličin je uveden v Příloze A.

2.3.4 Omezená rozdělení

Mezi teoretickými rozděleními jsou rozdělení mající alespoň jednu mez definičního intervalu rovnou ∞ nebo $-\infty$ velice běžná, mezi spojitými rozděleními dokonce převažují. Naproti tomu většina "reálných", prakticky používaných veličin nabývá pouze hodnot z omezeného intervalu $[a,b]$. Veličiny jako délka, hmotnost a pod. nemohou nabývat záporných hodnot, i když často bývají popsány rozdělením definovaným na nekonečném intervalu $(-\infty, \infty)$. Podobně lze najít i další "rozumná" omezení definičního intervalu mnoha veličin.

Například skutečná délka průmyslově vyráběného šroubu s nominální délkou 50 mm nemůže přesáhnout jistou maximální hodnotu ani nemůže být menší než jistá hodnota minimální a to ani v případě že je rozdělení délek tohoto šroubu považováno za normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 50$ mm a s definičním intervalem $(-\infty, \infty)$, viz obrázek 2.3.4.1.



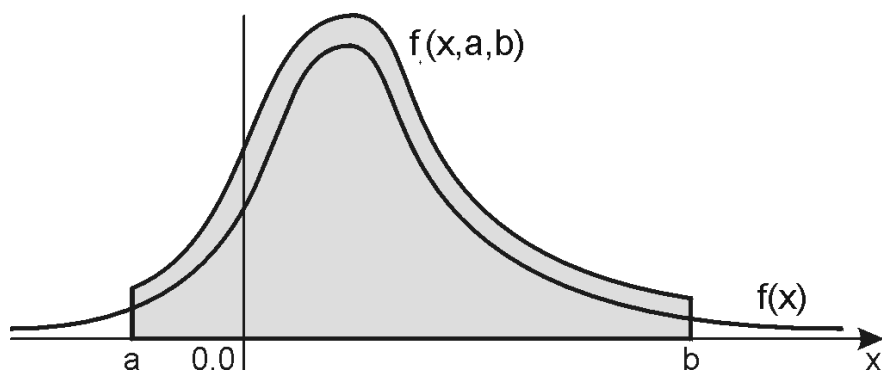
Obr. 2.3.4.1: Rozdělení délky šroubu

Dalším důvodem k omezení definičního intervalu náhodných veličin může být požadavek generování těchto veličin pomocí počítače. V takových případech bývá generované rozdělení aproximací rozdělení požadovaného, a to jak z důvodu omezené přesnosti reprezentace čísel, tak i z důvodu jejich omezeného rozsahu. Přesnosti a rozsahy několika nejdůležitějších typů čísel z překladače Pascal/Delphi pro PC, jsou uvedeny v následující tabulce.

Typ	Počet bitů	Rozsah	Počet hodnot
Byte	8	0 ... 255	256
Word	16	0 ... 65535	65536
Smallint	16	$\approx \pm 3.2 \times 10^3$	65536
Longint	32	$\approx \pm 2.1 \times 10^9$	$\approx 4 \times 10^9$
Single	32	$\approx \pm 1.5 \times 10^{-45} \dots 3.4 \times 10^{38}$	$\approx 10^7$
Double	64	$\approx \pm 5.0 \times 10^{-324} \dots 1.7 \times 10^{308}$	$\approx 4 \times 10^{15}$

Tab 2.3.4.1 Rozsahy a přesnosti počítačové reprezentace čísel

Spojité rozdělení s hustotou pravděpodobnosti f lze omezit na interval $[a, b]$ nejsnáze tak, že všechny hodnoty ležící mimo požadovaný interval definujeme jako nulové, viz obrázek 2.3.4.2.



Obr 2.3.4.2: Hustota pravděpodobnosti omezeného rozdělení

Tedy nově definovaná hustota pravděpodobnosti f_t rozdělení omezeného na interval $[a, b]$ bude

$$f_t(x, a, b) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a) \\ g(x) & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{pro } x \in (b, \infty) \end{cases} \quad /2.3.4.1/$$

Mezi funkcemi f a g lze definovat jednoduchý lineární vztah

$$g(x) = c f(x) \quad /2.3.4.2/$$

Funkce f_t nabývá nenulových hodnot pouze uvnitř intervalu $[a, b]$. Jelikož pro všechny funkce hustoty pravděpodobnosti platí vztah /2.3.2.17/ (celková plocha vymezená funkcí hustoty pravděpodobnosti je rovná jedné), je

$$\int_a^b g(x) dx = 1 \quad /2.3.4.3/$$

Velikost konstanty c lze pak s pomocí vztahů /2.3.4.2/ a /2.3.4.3/ určit

$$c = \frac{1}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{1}{F(b) - F(a)} \quad /2.3.4.4/$$

Hustota f_t oboustranně omezeného rozdělení je pak definována vztahem

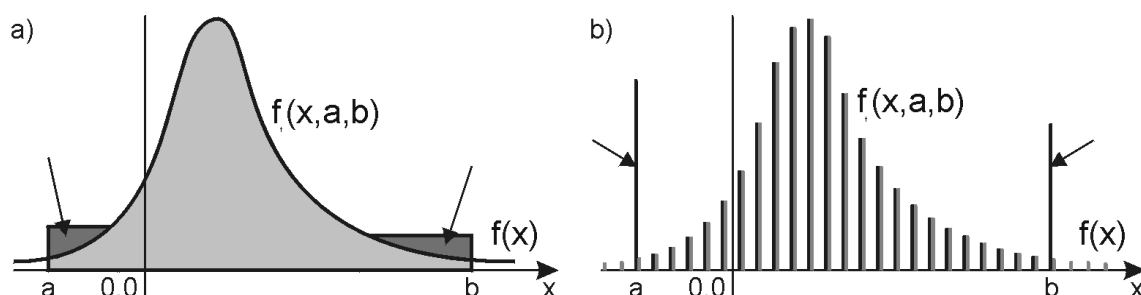
$$f_t(x, a, b) = \begin{cases} \frac{f(x)}{F(b) - F(a)} & \text{pro } x \in [a, b] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.3.4.5/$$

V případě diskrétních rozdělení lze použít obdobný postup.

Při definování omezeného rozdělení je také třeba porovnat pravděpodobnost vyloučení hodnot ležících mimo zvolený interval s předpokládaným počtem generovaných hodnot. Například při generování 10^4 hodnot může být vyloučení hodnot ležících mimo zvolený interval s pravděpodobností 10^{-5} zanedbatelné, ale při generování 10^6 hodnot již může mít vyloučení okrajových hodnot významný vliv. Je však třeba si uvědomit, že pravděpodobnost současného výskytu více vzájemně nezávislých jevů

je rovna součinu jednotlivých pravděpodobností jejich výskytu. Tedy již pravděpodobnost současného vyloučení dvou hodnot ležících mimo zvolený interval, a tedy zanedbání jejich možné interakce, je při pravděpodobnosti vyloučení každého z jevů 10^{-5} pouze 10^{-10} . Tedy ani značné omezení definičních intervalů generovaných rozdělení nemusí mít v některých případech mít významný vliv na přesnost výsledků.

Omezení rozsahu generovaných rozdělení je třeba v některých případech provádět také s ohledem na přijatelnou odchylku charakteristik generovaného rozdělení od hodnot rozdělení původního. Odstraněnou plochu pod křivkou funkce hustoty pravděpodobnosti veličiny se spojitým rozdělením lze přemístit na okraje definičního intervalu $[a,b]$, viz obrázek 2.3.4.3 a). Takto lze dosáhnout zmenšení rozdílů mezi charakteristikami nově vytvořeného a původního rozdělení. Obdobným způsobem lze pro veličiny s diskrétním rozdělením hodnoty z oblastí mimo požadovaný interval přemístit na krajní body definičního intervalu nového rozdělení, viz obr 2.3.4.3 b).

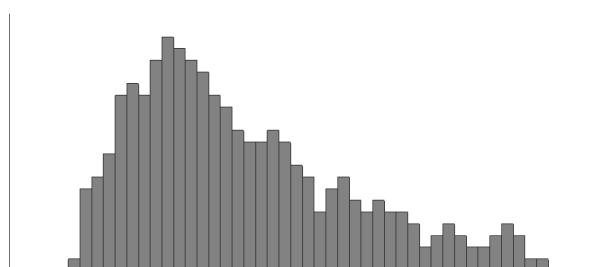


Obr 2.3.4.3: Znázornění useknutých rozdělení s přemístěnými hodnotami

V mnoha případech je omezením definičního intervalu rozdělení ovlivněno jen nepatrně. Například pro normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 5.0$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 1.0$ leží 99.99% v intervalu $[1,11, 8,89]$, což odpovídá přibližně ± 3.89 násobku směrodatné odchylky σ .

2.3.5 Histogram

Histogram nebo také histogram četností je zjednodušenou a přibližnou grafickou reprezentací hustoty pravděpodobnosti. Histogram je sloupcový graf tvořený nepřekrývajícími se obdélníky různé výšky, jejichž celková plocha je rovna jedné. Šířka jednotlivých obdélníků může být různá, ale nejčastěji jsou používány histogramy se shodnou šířkou všech obdélníků. Příklad histogramu je na obrázku 2.3.5.1.

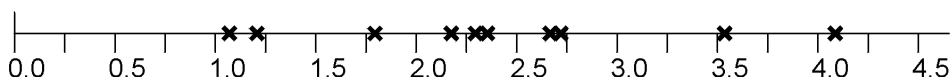


Obr. 2.3.5.1: Histogram

Histogramu se většinou používá pro určení empirické funkce hustoty pravděpodobnosti pro daný náhodný výběr – vzorek dat, získaný na základě měření, testů, zkoušek nebo historických záznamů. Pro tato data lze histogram vytvořit následujícím postupem. Obor hodnot sledované veličiny je rozdělen na disjunktní intervaly – třídy. Nad každým intervalem je zkonstruován obdélník o ploše odpovídající počtu hodnot ležícímu v tomto intervalu [36].

Na obrázku 2.3.5.2 je vzorek dat – posloupnost realizací náhodné veličiny a jeho grafické znázornění.

1.14644147
3.51844067
2.28560163
1.17150386
2.66531510
2.70485327
2.20155830
2.38540335
4.08502683
1.79689608

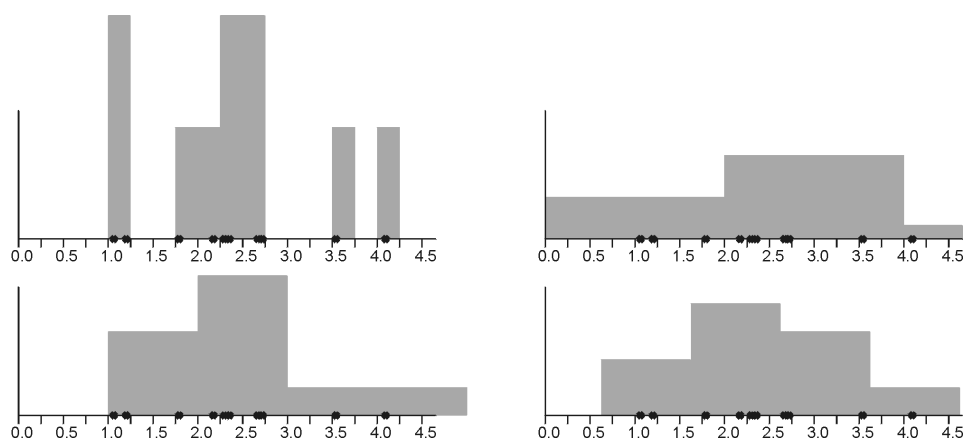


Obr. 2.3.5.2: Vzorek dat

Pro rozsáhlejší soubory dat se graf zahušťuje a je použitelný pouze pro identifikaci jednotlivých odlehklých pozorování na okrajích oboru hodnot. O vlastnostech centrální oblasti rozdělení graf nepodává žádné použitelné informace. Po seřazení datového souboru podle velikosti hodnot dat lze vytvořit empirickou distribuční funkci schodovitého tvaru. Jednou z možností jak lépe graficky reprezentovat hlavní část rozdělení je histogram.

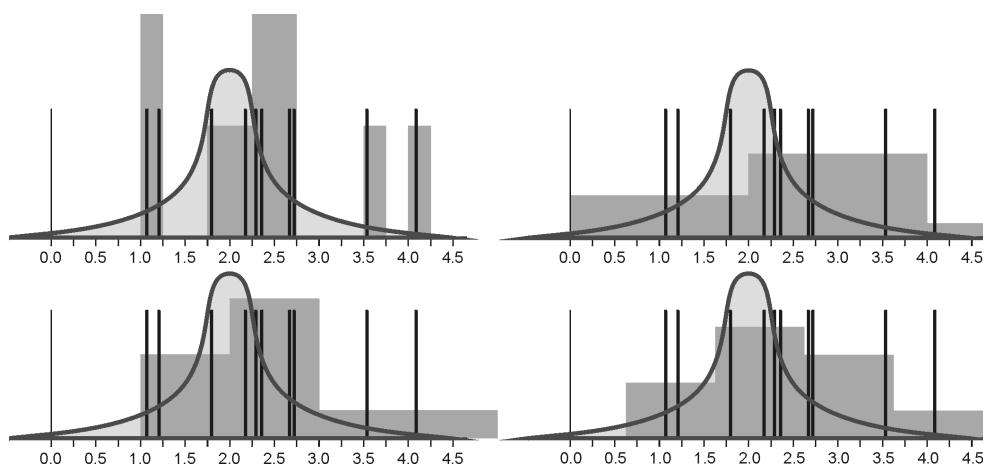
Při konstrukci histogramu je třeba vhodně zvolit počet a polohu jednotlivých tříd. Pokud je počet tříd příliš malý, dochází ke ztrátám informací o původním rozdělení a přesnější určení hledaného rozdělení je nemožné. Pokud je počet tříd příliš velký, zůstává mnoho tříd neobsazeno nebo obsazeno nedostatečným počtem vzorků, což je opět na závalu při určování hledaného rozdělení. Určené rozdělení může být významně ovlivněno i polohou hranic jednotlivých tříd [77].

Následující obrázek 2.3.5.3 ukazuje několik histogramů, vytvořených z výše uvedeného vzorku dat při použití různých velikostí a poloh tříd.



Obr. 2.3.5.3: Konstrukce histogramů ze vzorku dat

Vytvořený histogram bývá obvykle nahrazován některým z teoretických rozdělení, jehož typ bývá zvolen buď na základě znalostí teoretických principů vedoucích k vytvoření posloupnosti nebo na základě vlastností vzorku dat. V situacích, kdy není k dispozici dostatečně rozsáhlý vzorek, je třeba typ rozdělení odhadnout. Při volbě typu rozdělení hraje roli i jeho předpokládané budoucí použití. Proto bývá často použito normálního rozdělení. Jeho vlastnosti jsou dobře známy, mnoho výpočtů lze provést analyticky, mnohdy lze předpokládat možnost aplikace centrální limitní věty a tedy i očekávat přibližnou normalitu hledaného rozdělení. Obrázek 2.3.5.4 ukazuje vztah vytvořených histogramů a normálního rozdělení původní veličiny.

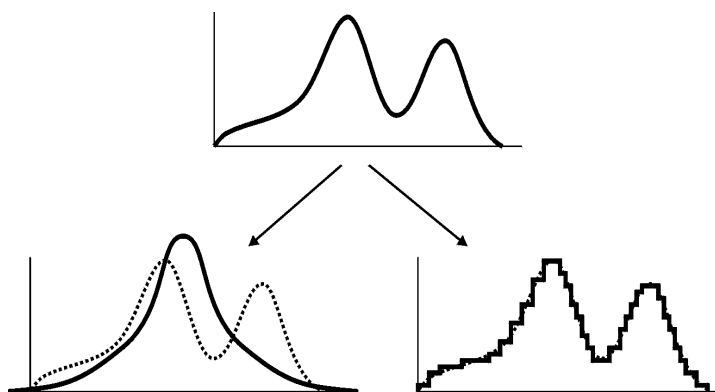


Obr. 2.3.5.4: Konstrukce histogramů ze vzorku dat s normálním rozdělením

Z obrázků 2.3.5.3 a 2.3.5.4 je zřejmé, že tvar histogramu je silně ovlivněn volbou velikostí a poloh tříd a že při nedostatečném rozsahu vzorků může snadno dojít k nesprávnému odhadu typu rozdělení a tím i k nesprávné interpretaci dostupných dat.

Histogram lze vytvořit též pro známou funkci hustoty pravděpodobnosti. Obor hodnot daného rozdělení je opět rozdělen na disjunktní třídy a pravděpodobnosti příslušející třídám určují plochy odpovídajících sloupců histogramu. Při vytváření histogramu je ztracena část informace o původním rozdělení. Statistiky vytvořeného rozdělení se proto mohou lišit od statistik rozdělení původního. Uvedený postup vytvoření histogramu lze považovat za aproximaci původního rozdělení. Pokud

je rozdělení hodnot uvnitř jednotlivých tříd považováno za rovnoměrné, je originální rozdělení aproximováno rozdělením po částech rovnoměrným. Pokud jsou všechny hodnoty uvnitř jednotlivých tříd reprezentovány jedinou hodnotou (např. hodnotou středu intervalu), je originální rozdělení aproximováno rozdělením diskrétním. Obě nejsou definována hodnotami parametrů ale polohami a rozsahy tříd a četnostmi v jednotlivých třídách. Takto definovaná rozdělení lze označit za neparametrická [49]. Uvedený způsob aproximace lze velmi dobře použít pro rozdělení, která mají funkci hustoty pravděpodobnosti nepravidelného tvaru a pro jejichž aproximaci nelze najít vhodná jednoduchá teoretická rozdělení, viz obrázek 2.3.5.7 [35].



Obr.2.3.5.7: Aproximace rozdělení

Informace obsažené v histogramu lze tabelovat a snadno uložit v paměti počítače. Uložené informace lze použít pro efektivní generování hodnot odpovídajícího rozdělení.

2.4 Generátory náhodných čísel

Všechny výpočty využívající metod Monte Carlo nebo simulace stochastického typu vyžadují generování numerických realizací náhodných veličin s daným rozdělením. Tyto realizace jsou nazývány náhodná čísla [35].

Jen velmi omezené množství problémů lze řešit s použitím malého počtu náhodných čísel. Ve většině případů je třeba generovat velké množství náhodných čísel. Zpracování potřebného velkého množství náhodných čísel je prakticky proveditelné pouze s využitím počítače. Počítač může být nástrojem pro generování čísel, provádění výpočtů a simulací, sběr dat, jejich vyhodnocení i prezentaci.

Požadavky na vlastnosti generátoru se liší v závislosti na jeho aplikaci. K obvyklým požadavkům patří rovnoměrné pokrytí celé množiny generovaných hodnot, nízká korelace mezi prvky posloupnosti a pod. Volba generátoru náhodných čísel a způsob jeho realizace ovlivňuje rychlost výpočtu i přesnost výsledků. Generování náhodných čísel s požadovaným rozdělením se provádí obvykle ve dvou krocích. Nejprve je pomocí primárního generátoru generována posloupnost náhodných, vzájemně nezávislých čísel s rovnoměrným rozdělením. Z této posloupnosti je vhodnou transformací vytvořena posloupnost čísel s požadovaným rozdělením [17]. Volba transformace a způsob její implementace je většinou kompromisem mezi dosaženou přesností generovaného rozdělení, rychlostí výpočtu a paměťovými nároky. Pro urychlení

výpočtů za cenu zvýšených nároků na paměť lze často použít tabulace hodnot potřebných funkcí. Zjednodušení a urychlení výpočtu lze také dosáhnout použitím vhodných aproximací, jak je naznačeno dále.

2.4.1 Primární generátor

Pro získání výchozí posloupnosti rovnoměrně rozdělených, statisticky nezávislých náhodných čísel lze použít některý z fyzikálních generátorů nebo generátoru pseudonáhodných čísel. Při použití fyzikálních generátorů jsou náhodná čísla získávána na základě nějakého přírodního jevu s náhodným chováním. Pseudonáhodná čísla jsou generována počítačem podle speciálního algoritmu. Posloupnost pseudonáhodných čísel je ve skutečnosti zcela deterministická, má však některé důležité vlastnosti náhodné posloupnosti. Proto se někdy nerozlišuje mezi náhodnými a pseudonáhodnými čísly a pod pojmem náhodná čísla jsou chápána čísla pseudonáhodná. Zvláštním typem generátoru, stojícím na pomezí obou dříve uvedených generátorů, jsou tabulky náhodných čísel.

2.4.1.1 Fyzikální generátory

Jako základ fyzikálního generátoru náhodných čísel lze použít téměř libovolný fyzikální princip, který má náhodný charakter se známými vlastnostmi. Jako příklad lze uvést házení mincí nebo kostkou. K nejběžnějším v praxi používaným generátorům patří šumové generátory, využívající vlastnosti polovodičového přechodu nebo kombinace radioaktivního zářiče a detektoru [35]. Fyzikální generátory mají řadu nevýhod a proto se používají zřídka a nahrazovány pseudonáhodnými generátory:

- Posloupnost generovaných čísel je neopakovatelná, což ztěžuje vývoj algoritmů, ladění programů a porovnávání výsledků testování.
- Stabilita vlastností generátorů je závislá na vnějších vlivech a je obtížně dlouhodobě udržitelná.
- Změny vlastností generátorů jsou nesnadno zjistitelné a mohou významně ovlivnit výsledky simulací.
- Skutečné chování generátorů se často liší od teoretického v důsledku výrobních tolerancí atd.
- Rychlost generování náhodných čísel bývá v mnoha případech nedostatečná.
- Převod fyzikální veličiny nesoucí náhodnou informaci na dále zpracovatelná data vyžaduje speciální zařízení.

2.4.1.2 Tabulky náhodných čísel

Mnoho problémů fyzikálních generátorů lze odstranit použitím tabulek náhodných čísel. Tyto tabulky jsou obvykle získány s použitím některého fyzikálního generátoru, případně na základě vhodných hromadných dat vytvořených k nějakému jinému účelu

(např. čísla z telefonního seznamu, ze sčítání lidu a pod.). Data uložená v tabulkách je možné snadno důkladně testovat a zjištěné nedostatky mohou být korigovány, případně nekorigovatelné části dat mohou být odstraněny.

V roce 1927 byly publikovány L. H. C. Tippettem tabulky obsahující 41 600 náhodných čísel získaných na základě demografických dat. Přibližně po deseti letech se ukázalo, že tyto tabulky nejsou vhodná pro získávání posloupností velkého rozsahu. V roce 1939 M. G. Kendall a B. B. Smith publikovali tabulky 100 000 náhodných čísel, vytvořené pomocí elektro-mechanicko-optického zařízení, generujícího náhodné číslice pomocí otáčejících se kotoučů s očíslovanými sektory. Velmi známé tabulky 1 000 000 náhodných čísel byly vytvořeny společností RAND Corporation. K jejich vytvoření bylo použito elektronické zařízení, generující náhodné bity periodickým vzorkováním čítačů, zaznamenávajících náhodné impulsy. Takto získaná posloupnost bitů byla transformována na náhodné číslice [73]. Výchozí tabulky byly vytvořeny v roce 1947. Po důkladném testování byly objeveny drobné nedokonalosti a po jejich odstranění byly tyto tabulky publikovány v roce 1955. V roce 1996 G. Marsaglia publikoval CD-ROM obsahující přibližně 5 miliard náhodných bitů. Data vznikla kombinací náhodných čísel z elektronicky generovaného bílého šumu a z generátoru pseudonáhodných čísel.

Pro praktické použití bývají tabulky náhodných čísel uloženy v paměti počítače. Ačkoli mají tabulky ve srovnání s fyzikálními generátory mnoho výhod, přesto je jejich praktické použití omezené. K hlavním nevýhodám tabulek náhodných čísel patří:

- Délka posloupnost generovaných čísel je omezená, což může být na závadu při řešení rozsáhlých úloh.
- Pro uložení dat je třeba velkého objemu paměti.
- Rychlost generování náhodných čísel závisí na rychlosti přístupu k uloženým datům. Ta může být nedostatečná, pokud nejsou data uložena přímo ve fyzické operační paměti.

2.4.1.3 Generátory pseudonáhodných čísel

Generátory pseudonáhodných čísel jsou rekurentní algoritmy pro generování náhodných posloupností. Posloupnost pseudonáhodných čísel je ve skutečnosti zcela deterministická, neboť vzniká pomocí deterministického algoritmu, ale má vlastnosti posloupnosti náhodné. Generovaná posloupnost je opakovatelná. Rekurentní algoritmy vyžadují před použitím inicializaci, spočívající v zadání výchozí hodnoty nebo vektoru. Pro daný výchozí vektor je generována vždy stejná posloupnost. Při konkrétní implementaci bývá kromě možnosti explicitního zadání výchozího vektoru také možnost náhodné inicializace. Při ní je pro vytvoření vstupního vektoru použita nějaká informace mající náhodný charakter, např. okamžitá hodnota systémového času. Po jistém počtu členů se generovaná posloupnost cyklicky opakuje. Délka tohoto cyklu se nazývá perioda [41]. Při praktickém použití by měla být perioda posloupnosti tak dlouhá, aby při simulacích nedošlo k opakování.

Univerzální generátor pseudonáhodných čísel nelze vytvořit, neboť vzhledem k deterministickému charakteru generované posloupnosti lze obvykle najít aplikaci (transformaci), pro kterou generovaná posloupnost nebude použitelná. Proto je třeba

zvolený generátor testovat s ohledem na jeho vhodnost pro danou aplikaci. Při generování náhodných čísel je častým požadavkem efektivita implementace a rychlost generování při použití konkrétního procesoru, operačního systému a programovacího jazyka.

J. von Neuman navrhl v roce 1946 metodu středu kvadrátu (middle-square method) pro generování náhodných čísel počítačem. Princip metody spočívá ve výpočtu kvadrátu čísla a extrakci vnitřních číslic pro určení dalšího náhodného čísla. Z $2a$ - místného dekadického čísla x_i získáme umocněním po případném doplnění nulami zleva $4a$ - místné číslo, z něhož jako nové číslo použijeme prostředních $2a$ číslic

$$x_{n+1} = x_n^2 \operatorname{div} 10^a - 10^{3a} (ax_n^2 \operatorname{div} 10^{3a}) \quad /2.4.1.1/$$

Operátor *div* ve vztahu /2.4.1.1/ značí celočíselné dělení. Tato metoda byla testována v padesátých letech a bylo dokázáno, že popsany generátor nemá v obecných případech dobrou kvalitu, i když může dávat uspokojivé výsledky ve speciálních případech.

Dnes nejpoužívanějším generátorem pseudonáhodných čísel je lineární kongruenční generátor zavedený v roce 1948 D. H. Lehmerem. Tento generátor je realizovaný na základě následujícího rekurentního vzorce

$$x_{n+1} = (a x_n + c) \bmod m \quad /2.4.1.2/$$

kde x_{n+1} je generované číslo

x_n je předchozí generované číslo

a je multiplikativní konstanta ($a \geq 0$)

c je aditivní konstanta ($c \geq 0$)

m je modul ($m > x_n$, $m > a$ a $m > c$)

Operátor *mod* označuje operaci modulo (kongruenci). V literatuře lze často najít pro kongruenci formu zápisu $a \equiv b \pmod{c}$, případně $a = b \pmod{c}$. Jelikož zde je kongruencí míněn zbytek po dělení, je v následujícím textu užíván zápis $a = b \bmod c$, přičemž *mod* je považován za binární operátor.

Nová hodnota x_{n+1} generované posloupnosti je vypočtena na základě hodnoty předchozí x_n . Celý proces je odstartován pro hodnotu $x_0 \geq 0$. Vlastnosti generované posloupnosti závisejí na volbě konstant a , c a m . Pomocí některých teorémů z teorie čísel lze stanovit pravidla usnadňující volbu těchto konstant. Hodnota m se často volí s ohledem na délku slova W počítače použitého pro generování posloupnosti. Obvyklá délka slova bývá u mnoha počítačů 16, 32, nebo 64. Pokud je $m = 2^W$, je operace *mod* prováděna pouhým odstraněním nejvyšších bitů pomocí posuvů namísto výpočtů dělení, které jsou mnohem pomalejší. Při použití generátorů s $m = 2^W$ může být v některých situacích nevýhodou, že se nižší řady generovaných čísel opakují s výrazně kratší periodou [76]. Proto se častěji volí $m = 2^W \pm 1$. Zajímavý algoritmus pro výpočet funkce *mod* pro $m = 2^W + 1$ je popsán v [41].

Délka periody posloupnosti generované podle vztahu /2.4.1.2/ nemůže být větší než m . To znamená že při vhodné volbě konstant a , c a m lze generovat nejvýše m různých čísel. Aby měl generátor realizovaný podle vztahu /2.4.1.2/ periodu maximální možné délky m , musí být splněny následující podmínky [41]:

- $c > 0$ a hodnoty c a m jsou nesoudělná čísla.
- $a \bmod d = 1$ pro všechna d , jež jsou prvočíselnými děliteli čísla m .
- $a \bmod 4 = 1$ pokud je číslo 4 dělitelem čísla m .

Například generátor $x_{n+1} = (3x_n + 7) \bmod 10$ poskytuje pro $x_0 = 0$ posloupnost čísel 0, 7, 8, 1, 0, 7, 8, 1, 0, ... Délka periody je 4, což je méně než maximum dosažitelné pro použitou konstantu $m = 10$. Maximální periodu lze pro $m = 10$ dosáhnout např. při $a = 1$ a $c = 1$. Generátor $x_{n+1} = (x_n + 1) \bmod 10$ poskytuje pro $x_0 = 0$ posloupnost čísel 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, ... Délka periody generované posloupnosti je 10, ale posloupnost zjevně nemá náhodný charakter. Při volbě konstant $a = 1$ a $c = 7$, respektující výše uvedené doporučení pro získání maximální periody, poskytuje generátor $x_{n+1} = (x_n + 7) \bmod 10$ pro $x_0 = 0$ posloupnost čísel 0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, 7, 4, ..., kterou lze pro malá n za náhodnou považovat.

Pro n -tý člen generované posloupnosti, pro $n \geq 0$ platí [76]

$$x_n = \left(a^n x_0 + c \frac{(a^n - 1)}{a - 1} \right) \bmod m \quad /2.4.1.3/$$

Důkaz lze provést indukcí. Pro $n = 1$ výraz 2.4.1.3 platí, neboť

$$x_1 = \left(a^1 x_0 + c \frac{(a^1 - 1)}{a - 1} \right) \bmod m = (a x_0 + c) \bmod m \quad /2.4.1.4/$$

Platí-li výraz 2.4.1.3 pro n -tý člen, pak pro $n+1$ -ní člen je

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(a \left(\left(a^n x_0 + c \frac{(a^n - 1)}{a - 1} \right) \bmod m \right) + c \right) \bmod m \\ &= \left(a^{n+1} x_0 + ca \frac{(a^n - 1)}{a - 1} + c \frac{a - 1}{a - 1} \right) \bmod m \\ &= \left(a^{n+1} x_0 + c \frac{a^{n+1} - a + a - 1}{a - 1} \right) \bmod m \\ &= \left(a^{n+1} x_0 + c \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \right) \bmod m \end{aligned} \quad /2.4.1.5/$$

což je výraz 2.4.1.3 pro $n+1$ -ní člen. Tím je dokázáno, že výraz 2.4.1.3 platí pro všechna $n \geq 0$.

Zobecněním vztahu /2.4.1.2/ lze definovat rozsáhlejší třídu lineárních kongruenčních generátorů

$$x_{n+1} = (a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k} + c) \bmod m \quad /2.4.1.6/$$

Z ní lze pak odvodit některé speciální případy jako je aditivní (Fibonacciho) generátor [41]

$$x_{n+1} = (x_n + x_{n-1} + \dots + x_{n-k}) \bmod m \quad /2.4.1.7/$$

nebo multiplikativní generátor [35]

$$x_{n+1} = (a_0 x_n) \bmod m \quad /2.4.1.8/$$

Multiplikativní generátor generuje čísla z intervalu $[1, m-1]$, tedy jeho perioda může být dlouhá nejvýše $m-1$. Rozšířením vztahu /2.4.1.2/ lze definovat třídu kvadratických kongruenčních generátorů [60]

$$x_{n+1} = (d x_n^2 + a x_n + c) \bmod m \quad /2.4.1.9/$$

Rozdělení, generované kongruenčními generátory podle vztahu /2.4.1.2/, je diskrétní a nabývá hodnot celých čísel z intervalu $[0, m-1]$. Tato celá čísla lze jednoduše transformovat operací $u_i = \frac{x_i}{m}$ na racionální čísla z intervalu $[0, 1)$.

Pro dostatečně velká m a při dostatečně dlouhé periodě získané hodnoty dobře aproximují výběr ze spojitého rovnoměrného rozdělení na intervalu $[0, 1)$. Toto rozdělení je výchozí pro získání hodnot dalších rozdělení.

2.4.1.4 Kombinované generátory

Perioda posloupnosti generované kongruenčním generátorem podle vztahu /2.4.1.2/ může při vhodné volbě konstant dosáhnout až délky m . Při efektivní implementaci algoritmu kongruenčního generátoru je velikost m omezena délkou slova použitého počítače. Tím je omezena i maximální dosažitelná velikost periody generátoru, která může být nedostatečná pro provádění simulací s velkým množstvím náhodných veličin a velkým počtem potřebných simulačních kroků. Proto bylo vytvořeno mnoho generátorů se zvětšenou délkou periody. Některé z nich vycházejí ze zobecněného kongruenčního generátoru (viz. vztah /2.4.6/). Příkladem je multiplikativní rekursivní generátor [60] definovaný jako

$$x_{n+1} = (a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_k x_{n-k}) \bmod m \quad /2.4.1.10/$$

s dosažitelnou délkou periody až m^k-1 pro prvočíselný modul m a vhodně volené konstanty a_i [41].

Kongruenční generátory mají některé vlastnosti, které omezují jejich použitelnost. Například body o souřadnicích (x_1, x_2, \dots, x_n) , $(x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$, $(x_3, x_4, \dots, x_{n+2})$, atd. v n -rozměrném prostoru leží na méně než $\sqrt[n]{(n!m)}$ rovnoběžných nadrovinách, což může ovlivnit výsledky simulací při řešení mnohorozměrných problémů. Ve snaze zvýšit periodu a odstranit některé nedostatky jednoduchých generátorů byla vytvořena velká skupina generátorů, založených na kombinování posloupností z několika kongruenčních generátorů. Kombinovaný lineární kongruenční generátor [60] navržený P. L'Ecuyerem má formu

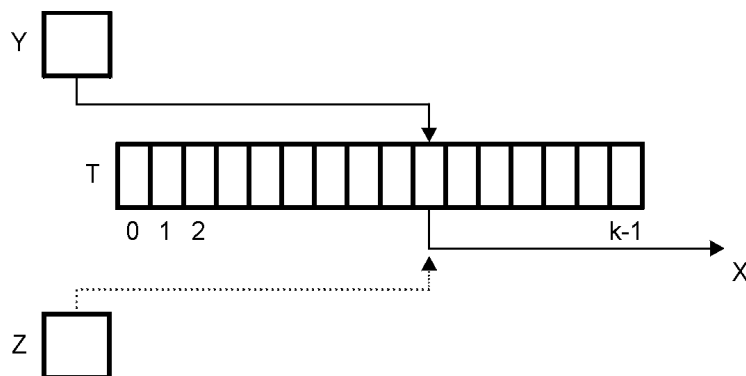
$$x_{n+1} = (x_{1,n} - x_{2,n} + \dots + (-1)^{k+1} x_{k,n}) \bmod (m_1 - 1) \quad /2.4.1.11/$$

kde jednotlivé členy $x_{j,i}$ jsou jednoduché lineární kongruenční generátory s prvočíselnými moduly m_j

$$x_{j,i} = (a_j x_{j,i-1}) \bmod m_j \quad /2.4.1.12/$$

Perioda posloupnosti je nejmenší společný násobek period dílčích generátorů, to je hodnot m_j . Posloupnosti generované pomocí popsaného kombinovaného generátoru navíc mívají lepší vlastnosti než posloupnosti generované jednotlivými použitými generátory.

Efektivní metoda pro kombinování dvou posloupností náhodných čísel s cílem získat novou posloupnost s lepšími vlastnostmi byla navržena v roce 1964 McLarenem a G. Marsagliou a je známa jako míchací generátor. Metoda je založena na následujícím principu (viz obrázek 2.4.1.1). K dispozici jsou dva nezávislé generátory náhodných čísel Y a Z a pomocná tabulka T obsahující k polí označených indexy $j = 0, 1, \dots, k-1$. Ta je nejprve naplněna k čísly y_0 až y_{k-1} generovanými pomocí prvního generátoru Y . Potom je v každém kroku pomocí druhého generátoru Z vygenerován náhodný index $i \in \langle 0, k-1 \rangle$. Hodnota uložená v odpovídajícím poli T_i tabulky T je použita jako výstupní hodnota x_i míchacího generátoru a na její místo je uloženo nové náhodné číslo y_i vygenerované generátorem Y .



Obr.2.4.1.1 Míchací generátor

Pokud jsou délky period obou generátorů vzájemně nesoudělná čísla, má výsledná posloupnost velmi dlouhou periodu. Ve většině případů je perioda výsledné posloupnosti rovna nejmenšímu společnému násobku period dílčích posloupností a vlastnosti vytvořené posloupnosti jsou obvykle lepší než vlastnosti posloupností původních [41].

Metody kombinování posloupností byly dále rozvíjeny a byly vytvořeny generátory s velmi dlouhou periodou blízkou 2^d , kde d počet bitů potřebných k ukládání hodnot použitých proměnných.

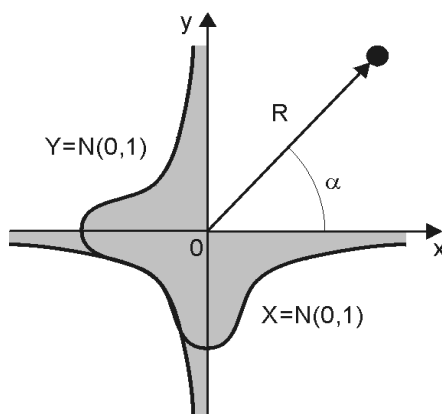
2.4.2 Generování obecných rozdělání

Za předpokladu, že můžeme pomocí vhodného primárního generátoru vytvořit posloupnost náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením, lze vhodnou transformací z této posloupnosti získat posloupnost čísel s jiným požadovaným rozdělením. Existuje řada transformačních metod s různou efektivitou a přesností. Některé metody jsou vhodné pro generování určitých typů rozdělání, jiné metody jsou velmi univerzální, ale mnohdy nepřilíš efektivní.

Posloupnost rovnoměrně rozdělanych čísel u_i z intervalu $[0,1)$, získanou např. z primárního generátoru, lze podle vztahu /2.4.1.2/ transformovat na posloupnosti čísel v_i z libovolného intervalu $[a,b)$ konečné délky, představující realizace spojitého rovnoměrného rozdělání na intervalu $[a,b)$

$$v_i = a + (b - a)u_i \quad /2.4.2.1/$$

Pro některá teoretická rozdělání byly vypracovány speciální postupy [35, 17]. Normální rozdělání lze generovat např. Box-Müllerovou metodou.



Obr. 2.4.2.1: Box-Müllerova metoda

Jsou-li X a Y nezávislé veličiny s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$, jsou polární souřadnice R a α bodů (x,y) v rovině (viz obrázek 2.4.2.1) také nezávislé veličiny, pro které platí

$$R^2 = x^2 + y^2 \quad /2.4.2.2/$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad /2.4.2.3/$$

Veličina R^2 má exponenciální rozdělání se střední hodnotou 2 a veličina α má rovnoměrné rozdělání na intervalu $(0,2\pi)$ [41]. Pro generování veličin X a Y lze použít inverzních vztahů ke vztahům /2.4.2.2/ a /2.4.2.3/

$$x = R \cos(\alpha) \quad /2.4.2.4/$$

$$y = R \sin(\alpha) \quad /2.4.2.5/$$

Exponenciální rozdělení je získáno z rovnoměrného rozdělení U na intervalu $(0,1)$ metodou inverzní transformace, popsanou dále. Druhé, nezávislé rovnoměrné rozdělení V na intervalu $(0,1)$ je transformováno na interval $(0,2\pi)$ transformací 2.4.2.1

$$r_i = \sqrt{-2 \ln(u_i)} \quad /2.4.2.6/$$

$$\alpha_i = 2\pi v_i \quad /2.4.2.7/$$

Posloupnost realizací normálního rozdělení lze potom generovat podle vzorců

$$n_{2i} = \sin(2\pi v_i) \sqrt{-2 \ln(u_i)} \quad /2.4.2.8/$$

$$n_{2i+1} = \cos(2\pi v_i) \sqrt{-2 \ln(u_i)} \quad /2.4.2.9/$$

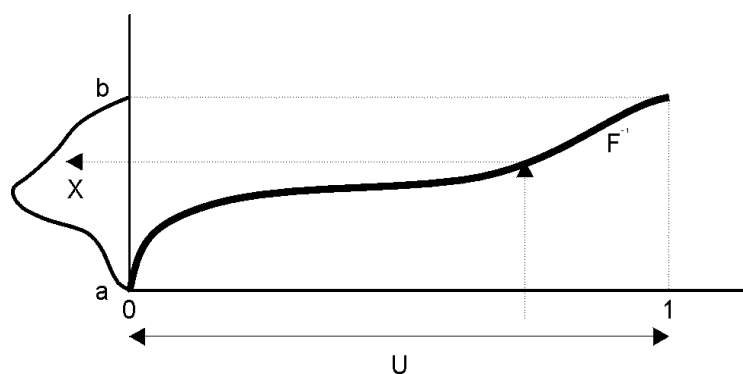
kde u_i a v_i jsou členy dvou nezávislých posloupností realizací náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením z intervalu $(0,1)$. Výsledkem transformace jsou dva členy n_{2i} a n_{2i+1} posloupnosti nezávislých náhodných čísel s normovaným normálním rozdělením $N(0,1)$ se střední hodnotou $\mu = 0,0$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 1,0$ [35]. Pro u_i a v_i lze použít i sousední členy jedné posloupnosti realizací náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením z intervalu $(0,1)$, pokud je zaručena jejich nulová seriální korelace.

Normální rozdělení $N(\mu, \sigma)$ s libovolnou střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ lze získat transformací normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$ pomocí jednoduché transformace

$$m_i = \mu + \sigma n_i \quad /2.4.2.10/$$

kde m_i jsou realizace požadovaného rozdělení $N(\mu, \sigma)$ a n_i jsou realizace normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$.

Pro generování obecných náhodných rozdělení existuje řada metod. Jako příklad velmi univerzální metody lze uvést metodu inverzní transformace (viz obrázek 2.4.2.2).



Obr. 2.4.2.2: Metoda inverzní transformace

Lze ukázat [35], že máme-li distribuční funkci $F(x)$, k ní odpovídající kvantilovou funkci $Q(p)$ a náhodnou veličinu U s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0,1)$, potom má náhodná veličina $X = Q(U)$ rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$. Pro generování náhodné veličiny s distribuční funkcí $F(x)$ potřebujeme tedy odpovídající kvantilovou funkci $Q(p)$ a generátor spojitého rovnoměrného rozdělení U na intervalu $(0,1)$. Pak lze realizace náhodné veličiny X získat podle vzorce

$$x_i = Q(u_i) \quad /2.4.2.11/$$

Kvantilová funkce Q je obvykle definovaná jako funkce inverzní k distribuční funkci $Q = F^{-1}$. Nutným předpokladem pro existenci funkce F^{-1} je, že funkce $F(x)$ musí být rostoucí. Pro efektivní použití uvedené metody je navíc třeba, aby funkce F^{-1} byla jednoduše a rychle vypočitatelná. V případech, kdy funkce F^{-1} neexistuje, lze kvantilovou funkci definovat s použitím inverzní relace, jak je ukázáno v části 2.4.3.3.

Metodou inverzní transformace lze generovat např. exponenciální rozdělení, jehož distribuční funkce F je definována vztahem

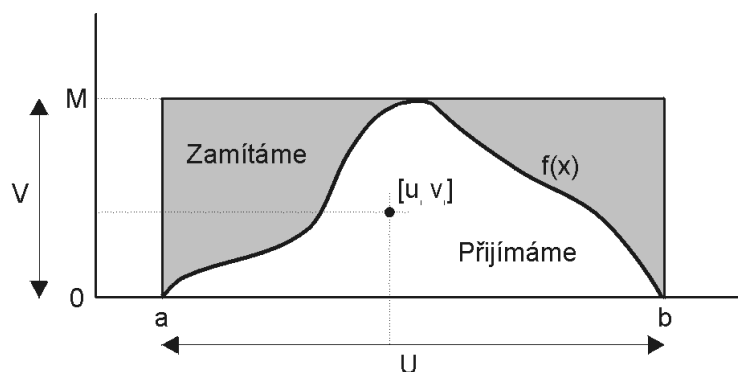
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{b}} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /2.4.2.12/$$

Jeho inverzní distribuční funkce je $Q(p) = F^{-1}(x) = -b \ln(1-p)$. Máme-li k dispozici náhodnou veličinu U s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0,1)$, má náhodná veličina $X = Q(U)$ exponenciální rozdělení s distribuční funkcí F .

Podmínky pro efektivní použití metody inverzní transformace u některých důležitých rozdělení nebývají splněny. Mnohdy lze použít namísto původního rozdělení jeho vhodné aproximace. Pokud generované rozdělení nabývá pouze hodnot z omezeného intervalu, lze potřebné hodnoty inverzní distribuční funkce (kvantilové funkce) tabelovat. Toho lze využít při implementaci rychlých algoritmů pro generování požadovaného rozdělení.

Další univerzální metodou je zamítací metoda, vypracovaná J. von Neumannem. Máme generovat realizace náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$, která je nulová vně intervalu (a,b) a má supremum $M = \sup\{f(x), a < x < b\}$. Vygenerujeme dvojice u_i a v_i z rovnoměrného rozdělení $U(a,b)$ a $V(0,M)$. Pokud $v_i \leq f(u_i)$, pak generované číslo $x_j = u_i$. V opačném případě, pokud $v_i > f(u_i)$ dvojici u_i a v_i nepoužijeme (zamítáme) a postup opakujeme (viz obrázek 2.4.2.3).

Nevýhodou zamítací metody je, že pro generování jednoho čísla je potřeba generovat dvojici čísel z rovnoměrných rozdělení. Rychlost generování je dále snížena tím, že nejsou použity všechny dvojice generovaných čísel. Podíl zamítnutých dvojic na celkovém počtu generovaných dvojic závisí na poměru ploch vymezených funkcí f . Pro některá rozdělení je výpočet hodnoty funkce hustoty pravděpodobnosti výrazně rychlejší než výpočet hodnoty kvantilové funkce [35]. V takových případech může být použití zamítací metody výhodnější než použití metody inverzní transformace.



Obr. 2.4.2.3: Zamítací metoda

2.4.3 Testování generátorů

Pseudonáhodná čísla jsou, jak bylo uvedeno v 2.4.1, posloupnosti čísel, získané pomocí deterministických metod, které vyhovují testům náhodnosti. Vlastnosti generátorů pseudonáhodných čísel se liší, stejně tak i požadavky na generátory. Testy ověřují některé vlastnosti generovaných posloupností a tak umožňují detekci nekvalitních generátorů.

Testy lze rozdělit do dvou skupin. Teoretické testy zjišťují vlastnosti generované posloupnosti na základě analýzy typu a parametrů použitého algoritmu. Přibližným určením hodnoty seriální korelace ρ_k (korelace mezi členy X_n a X_{n+k} generované posloupnosti) kongruenčního generátoru se zabýval B. Jansson v [37]. Pro ρ_1 lze odvodit přibližný vztah

$$\rho_1 \approx \frac{1}{a} + \frac{6}{a} \left(\frac{c}{m} \right)^2 - \frac{6c}{am} \quad /2.4.3.1/$$

Obdobné vztahy platí i pro ostatní k . V případě některých kombinací hodnot a , c a m je však uvedená aproximace nevyhovující, a tudíž ji jako jediné kritérium pro volbu konstant a , c a m nelze použít. Jelikož je teoretické zkoumání vlastností generátorů obtížné a mnohdy nemožné, používají se pro hodnocení vlastností generátorů především empirické testy. Tyto testy zjišťují vlastnosti generovaných posloupností na základě využití statistických metod pro analýzu vzorků těchto posloupností a nikoliv přímou analýzou algoritmů použitých pro generování. Mnohdy se používají testy pro analýzu časových řad, tedy stochastických procesů s diskretním časem. Zanedbáním časové složky je získána posloupnost hodnot, s kterou se dále pracuje jako s náhodnou posloupností.

Pro řadu testů je třeba splnit nějaké předpoklady, týkající se typů a parametrů rozdělení základního souboru. Takové testy nazýváme testy parametrickými. Protože často nebývají předpoklady pro aplikaci parametrických testů splněny, byla vytvořena skupina testů neparametrických, u kterých není potřeba splnit předpoklady o typech rozdělení ani jeho parametrech. U těchto testů bývá namísto hodnot členů testovaných posloupností použito jejich relativní velikosti nebo pořadí. Testy, které se zabývají

pořadím čísel v posloupnosti, se nazývají též testy náhodnosti. Naproti tomu testy frekvenčního typu na pořadí generovaných čísel neberou ohled.

Problém testování lze formulovat tak, že pro danou posloupnost zjišťujeme, zda ji lze považovat za posloupnost realizací získanou náhodným výběrem ze základního souboru s požadovaným rozdělením. V případě primárního generátoru je toto rozdělení rovnoměrné.

Prvním krokem při testování posloupnosti může být srovnání očekávaných momentových charakteristik pro dané rozdělení s vypočtenými výběrovými charakteristikami, jejichž rozdělení lze pro rozsáhlé soubory považovat za normální [35]. Zda je testovaná posloupnost realizací rozdělení základního souboru X , lze zjišťovat pomocí χ^2 testu dobré shody popsaného dále nebo Kolmogorov-Smirnovův (K-S) testu, založeného na statistice $D_n = \sup\{F(x) - F_n(x)\}$, kde $F(x)$ je distribuční funkce očekávaného rozdělení a $F_n(x)$ je empirická distribuční funkce [41]. K testům, zabývajícím se pořadím čísel v posloupnosti, patří testy sledující četnosti výskytu extrémních bodů (bodů zvratu), znamének diferencí (bodů růstu), poker test, zkoumající, zda četnost výskytu vybraných n -tic odpovídá očekávané četnosti, atd. [41]. Pro zjištění závislosti mezi členy posloupnosti lze použít například autokorelační funkci, Spearmanův koeficient pořadové korelace, seriální korelační koeficienty, korelogram, scatter plot [11] atd. Cyklické složky, tedy periodicitu, lze zjistit analýzou ve frekvenční oblasti pomocí periodogramu, představujícího nestranný odhad spektrální hustoty zkoumaného náhodného procesu [60].

Pro praktickou použitelnost kratších posloupností je důležitá lokální náhodnost. V posloupnosti x_1, \dots, x_n realizací náhodné veličiny X s diskrétním rovnoměrným rozdělením definovaným na množině A , pro $n \rightarrow \infty$ pravděpodobnost výskytu libovolné posloupnosti a_1, \dots, a_r , $a_i \in A$, s pevnou délkou r , konverguje k 1. Ve velmi dlouhých posloupnostech se proto mohou s určitou nenulovou četností vyskytnout i takové posloupnosti jako je opakování velkého počtu stejných čísel nebo jejich permutací. V krátkých posloupnostech náhodných čísel je výskyt posloupností výše uvedeného typu nepříjemný. Proto bývá testovaná posloupnost rozdělena na několik posloupností dílčích a požadovaná lokální náhodnost je zjišťována pro každou dílčí posloupnost zvlášť [35]. Další důležitou vlastností je stacionarita náhodné posloupnosti, tedy nezávislost některých vlastností posloupnosti na posunutí.

V praxi bývá posloupnost podrobena několika vybraným testům a pokud všem provedeným testům vyhoví, je považována za náhodnou, i když skutečnost, že posloupnost vyhověla všem testům nezaručuje, že se skutečně o náhodnou posloupnost jedná. V případě metody Monte Carlo není ve skutečnosti důležité, zda posloupnost vyhoví všem testům, ani zda se jedná o náhodnou posloupnost. Důležité je, zda lze tuto posloupnost použít pro řešení dané úlohy. Vhodnost posloupnosti pro daný typ úloh lze ověřit vyřešením úlohy obdobného druhu, jejíž řešení je známé nebo jež lze získat jiným postupem. Pokud výsledek získaný s použitím zkoumané posloupnosti má dostatečnou přesnost, předpokládáme, že tuto posloupnost můžeme použít pro řešení obdobných problémů.

2.5 Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo je obecný název pro metody které využívají k výpočtům posloupností náhodných čísel. Pomocí metody Monte Carlo lze získat přibližná řešení různých typů problémů, pokud lze jejich řešení vyjádřit jako číselnou charakteristiku (nejčastěji střední hodnotu) nějaké náhodné veličiny. Metodu Monte Carlo lze použít pro řešení pravděpodobnostních i deterministických úloh. Metoda Monte Carlo může být využita pro simulování stochastických (náhodných) problémů, jelikož tyto problémy jsou popsány pravděpodobnostním způsobem. Pro řešení deterministických problémů je třeba tyto problémy převést na řešení problémů stochastických. Výpočet hodnoty určitého integrálu nebo řešení soustav rovnic patří mezi typické deterministické úlohy řešené metodou Monte Carlo. Z tohoto pohledu lze metodu Monte Carlo považovat za numerickou metodu.

Vlastní řešení metodou Monte Carlo spočívá v mnohonásobném opakování pokusů (simulačních kroků, simulací). Odhady hledaných veličin jsou získávány statistickým zpracováním shromážděných dat. Možnost aplikace metody je založena na platnosti zákona velkých čísel a centrální limitní věty. Je-li X hodnotou hledané veličiny, pak posloupnost odhadů x_n , získaných po n krocích konverguje pro $n \rightarrow \infty$ v pravděpodobnosti k hodnotě X . Při určování střední hodnoty μ veličiny x lze za její

odhad vzít podle Chinčinyovy věty aritmetický průměr hodnot x_i :
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

Při určování pravděpodobnost nějakého jevu p na základě četností příznivých jevů n_s v n provedených pokusech lze podle Bernoulliovy věty za odhad pravděpodobnosti p vzít poměr těchto četností $\frac{n_s}{n}$. Výsledky získané metodou Monte Carlo mají tedy pravděpodobnostní charakter. Statistická chyba výsledků závisí na formulaci úlohy a provedeném počtu simulačních kroků.

Metoda Monte Carlo je všeobecně akceptována a stala se standardním nástrojem v mnoha oblastech. Jelikož k získání výsledků s dostatečnou přesností je třeba provést velké množství (tisíce až miliony) kroků, je generování náhodných čísel, vlastní simulace i záznam a vyhodnocování výsledků prováděno pomocí počítače. Vyrůstající výkon a kapacita počítačů umožňuje řešení rozsáhlých úloh, vyžadujících zpracování velkého množství proměnných a provedení velkého množství kroků. To dovoluje i řešení úloh dříve prakticky neřešitelných. Metoda Monte Carlo má významnou úlohu i při výuce, kde umožňuje snadno přehledně a názorně demonstrovat mnoho teoretických principů.

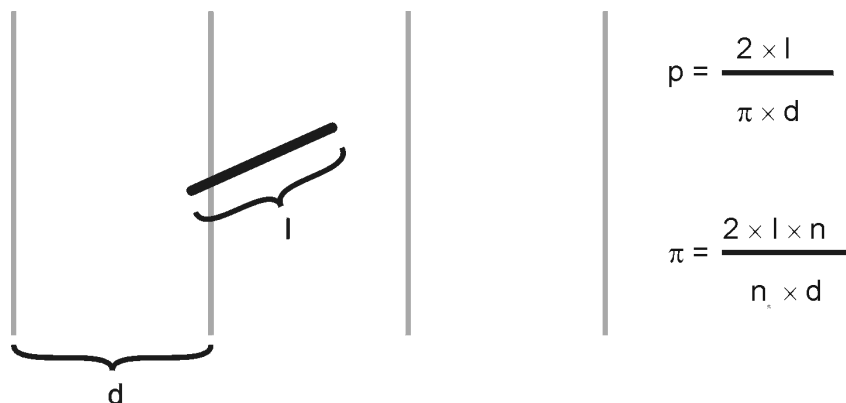
2.5.1 Historie metody Monte Carlo

Systematické využívání a rozvoj metod Monte Carlo započal kolem roku 1940, ale lze najít i několik rannějších případů. Za první dokumentované použití metody Monte Carlo je považován Buffonův experiment s jehlou z druhé poloviny osmnáctého století. G. Comte de Buffon náhodně vrhal jehlu délky l na desku s narýsovanými rovnoběžkami ve vzájemné vzdálenosti d (viz obrázek 2.5.1.1) a na základě známé pravděpodobnosti p , že takto vržená jehla protne libovolnou z rovnoběžných přímek určil hodnotu čísla π podle vztahu [29]

$$\pi = \frac{2l}{pd} \quad /2.5.1.1/$$

kde za bodový odhad pravděpodobnosti p lze vzít relativní četnost \hat{p} úspěšných hodů n_s v řadě n nezávisle konaných pokusů

$$\hat{p} = \frac{n_s}{n} \quad /2.5.1.2/$$



Obr. 2.5.1.1 Buffonova úloha

Na konci devatenáctého století se objevily teoretické práce, poukazující na souvislosti mezi náhodnými procesy a řešením různých deterministických problémů, např. některých typů diferenciálních rovnic. Na počátku dvacátého století Student (W. S. Gosset) používal náhodné experimenty při práci na vývoji některých typů rozdělení [68].

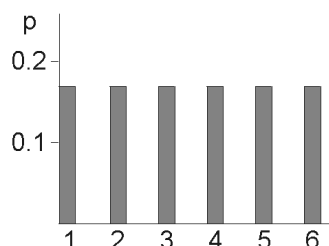
Název metody Monte Carlo byl vytvořen koncem druhé světové války členy týmu pracujícího na výrobě atomové bomby v rámci projektu Manhattan. Metoda byla nazvána podle známého centra hazardních her Monte Carla, hlavního města Monaka. Tento název byl zvolen pro podobnost mezi náhodným charakterem použitých výpočetních postupů a hazardních her.

Zpočátku byla metoda Monte Carlo používána především pro řešení problémů z jaderné fyziky ale brzy bylo zřejmé, že může být využita i pro řešení úloh z matematiky, fyziky, ekologie, ekonomie a pod. Teorie výpočetní složitosti, intenzivně rozvíjená od sedmdesátých let dvacátého století dovoluje přesnější identifikaci problémů, pro něž lze dostatečně přesné výsledky získat rychleji s pomocí metody Monte Carlo než jejich přesným řešením [69].

2.5.2 Přesnost výsledků

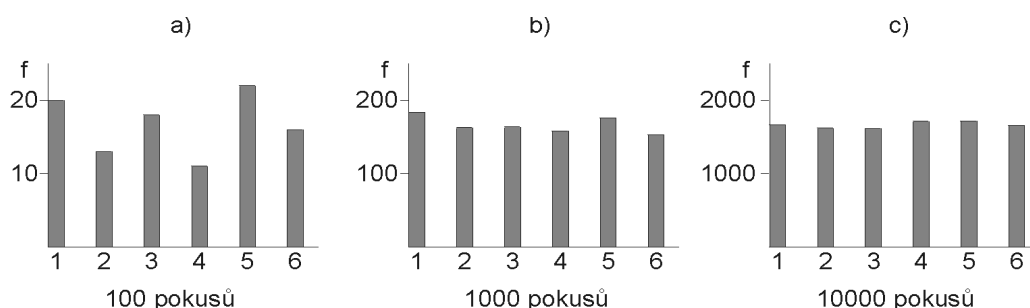
Základem fungování metody Monte Carlo je zákon velkých čísel. Na jeho základě lze předpokládat, že empirické rozdělení realizací náhodné veličiny konverguje k teoretickému rozdělení této veličiny s rostoucím počtem vzorků. Například při hodu ideální kostkou je pravděpodobnost, že padne vybrané číslo pro všechna čísla z množiny

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ stejná a rovná $p = \frac{1}{6}$. Tedy teoretické rozdělení je diskrétní rovnoměrné rozdělení znázorněné na obrázku 2.5.2.1.



Obr. 2.5.2.1 Házení kostkou – teoretické rozdělení

Získaná empirická rozdělení se blíží teoretickému se zvyšujícím se počtem hodů. Obrázek 2.5.2.2 ukazuje rozdělení četností získané po provedení 100, 1000 a 10 000 hodů.



Obr. 2.5.2.2 Házení kostkou – empirická rozdělení

Vlastností metody Monte Carlo je, že výsledky získané při opakovaném řešení se vzájemně liší. Tyto rozdíly jsou způsobeny stochastickým charakterem metody Monte Carlo. Stejně jako se snižuje rozptyl výsledků se zvyšujícím se počtem provedených kroků, klesají i rozdíly mezi výsledky opakovaných řešení. Zmenšování těchto rozdílů může být dobrým empirickým základem při odhadu počtu kroků, potřebných pro dosažení požadované přesnosti výsledků.

Při teoretickém odhadu přesnosti výsledků lze využít centrální limitní věty [29]. Odhadujeme-li hodnotu veličiny X pomocí výběrového průměru \bar{X} hodnot x_i , získaných metodou Monte Carlo po n pokusech, má podle centrální limitní věty veličina \bar{X} asymptoticky normální rozdělení se střední hodnotou X a rozptylem $\frac{\sigma^2}{n}$ [35].

Přesnost ϵ na hladině spolehlivosti α $P[|\bar{X} - X| < \epsilon] = \alpha$ je [46]

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} x_{(1+\alpha)/2} \quad /2.5.2.1/$$

Rozptyl σ^2 obvykle neznáme a proto je jako jeho nestranný odhad používán výběrový rozptyl [35]

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad /2.5.2.2/$$

Odhadujeme-li pravděpodobnost p nějakého jevu na základě četností příznivých jevů n_s v n provedených pokusech, má náhodná veličina X odpovídající tomuto jevu alternativní rozdělení s parametrem p . Veličina $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ má potom binomické rozdělení se střední hodnotou $\mu = p$ a rozptylem $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}$ [46]. Podle Moivre-Laplaceovy věty lze rozdělení veličiny \bar{X} pro velká n aproximovat normálním rozdělením $N(p, \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}})$. Analogicky k /2.5.2.1/ lze ukázat, že přesnost ϵ na hladině spolehlivosti α je

$$\epsilon = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} x_{(1+\alpha)/2} \quad /2.5.2.3/$$

Pro malá p lze použít přibližný vztah $p(1-p) \approx p$, tedy

$$\epsilon \approx \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n}} x_{(1+\alpha)/2} \quad \text{pro } p \ll 1 \quad /2.5.2.4/$$

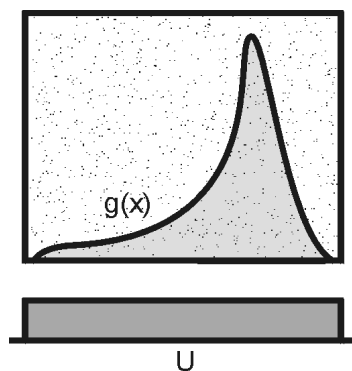
V obvyklých případech, kdy p je hledaná, předem neznámá pravděpodobnost, nelze vztahů /2.5.2.3/ a /2.5.2.4/ pro určení potřebného počtu kroků použít. V těchto situacích je obvykle provedeno více simulačních výpočtů s různě velkým počtem kroků n . Pokud zjištěné hodnoty pravděpodobnosti nevykazují velký rozptyl, předpokládá se, že hledaná hodnota byla určena s dostatečnou přesností.

2.5.3 Metody snížení rozptylu

Přesnost základní, jednoduché metody Monte Carlo vzrůstá se vzrůstajícím počtem provedených kroků n úměrně $n^{-1/2}$, jak vyplývá z výše uvedených vztahů /2.5.2.2/ a /2.5.2.4/. Tedy pro desetinásobné zvýšení přesnosti je třeba vykonat stonásobný počet kroků. Pro některé typy úloh je pro dosažení požadované přesnosti potřebné provést velmi vysoký počet kroků. Pro zvýšení přesnosti metody Monte Carlo bylo vytvořeno několik postupů, z nichž většina využívá dodatečných informací o řešeném problému. Vlastnosti metod pro snížení rozptylu se mohou vhodně doplňovat a tyto metody mohou být pomocí různých strategií vzájemně kombinovány [71]. Princip některých metod pro snížení rozptylu bude demonstrován na výpočtu určitého integrálu

$$I = \int_0^1 g(x) dx \quad /2.5.3.1/$$

Jednoduchá metoda Monte Carlo využívá při vzorkování oblasti rovnoměrného rozdělení, viz obrázek 2.5.3.1. Pro výpočet integrálu /2.5.3.1/ je použito rozdělení $U(0,1)$.



Obr. 2.5.3.1: Jednoduchá metoda Monte Carlo

Za odhad hodnoty I lze vzít veličinu

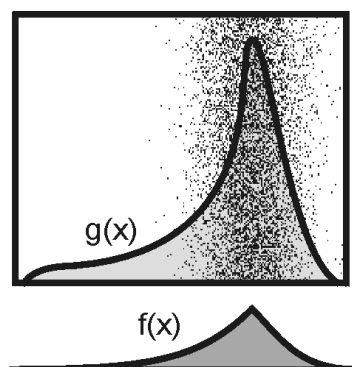
$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \quad /2.5.3.2/$$

kde X_i je náhodný výběr (náhodná čísla) z rozdělení $U(0,1)$. Rozptyl tohoto odhadu je (viz [35])

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \int_0^1 (g(x) - I)^2 dx \quad /2.5.3.3/$$

2.5.3.1 Výběr podle důležitosti

Výběr podle důležitosti (importance sampling) preferuje při simulaci oblasti, které jsou pro výpočet integrálu /2.5.3.1/ důležitější, viz obrázek 2.5.3.2.



Obr. 2.5.3.2: Výběr podle důležitosti

Při simulaci není tedy používáno náhodných čísel s rovnoměrným rozdělením ale s rozdělením s funkcí hustoty pravděpodobnosti $f(x)$. Pokud je funkce $f(x)$ taková, že $f(x) \neq 0$ právě když $g(x) \neq 0$, pak

$$I = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) f(x) dx = \int_0^1 h(x) f(x) dx \quad /2.5.3.4/$$

Za odhad hodnoty I lze vzít veličinu

$$\bar{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \quad /2.5.3.5/$$

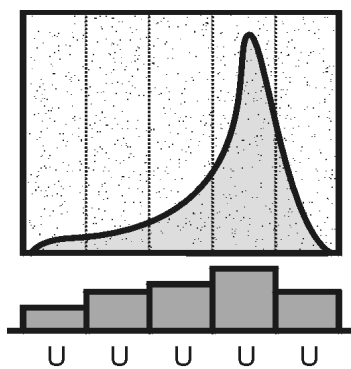
kde X_i je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x)$. Rozptyl tohoto odhadu je

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \int_0^1 (h(x) - I)^2 f(x) dx \quad /2.5.3.6/$$

Snížení rozptylu lze dosáhnout vhodnou volbou funkce $f(x)$ a tím i $h(x)$.

2.5.3.2 Oblastní výběr

Oblastní výběr (stratifikovaný výběr, výběr na podintervalech) také preferuje při simulaci oblasti, které jsou pro výpočet integrálu /2.5.3.1/ důležitější, podobně jako výběr podle důležitosti. Oblast je rozdělena na podoblasti (stratifikována) a v každé z nich lze provést jiný počet simulací při použití rovnoměrného rozdělení.



Obr. 2.5.3.3: Oblastní výběr

Rozdělíme-li interval $[0,1]$ na dílčí intervaly a vykonáme-li n_j simulací v každém intervalu $[a_{j-1}, a_j]$, kde $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$, můžeme za odhad hodnoty I vzít veličinu

$$\bar{I} = \sum_{j=1}^k \left(\frac{a_j - a_{j-1}}{n_k} \sum_{i=1}^{n_j} g(x_{ij}) \right) \quad /2.5.3.7/$$

kde y_{ij} jsou náhodná čísla z rovnoměrného rozdělení $U(a_{j-1}, a_j)$. Rozptyl tohoto odhadu je [35]

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{j=1}^k \frac{a_j - a_{j-1}}{n_j} \int_{a_{j-1}}^{a_j} g^2(x) dx - \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} g(x) dx \right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} \left((a_j - a_{j-1}) \int_{a_{j-1}}^{a_j} g^2(x) dx - \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} g(x) dx \right)^2 \right) \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} V_j^2
\end{aligned}
\tag{2.5.3.8/}$$

Veličiny V_j^2 vyjadřují rozptyl v jednotlivých oblastech. Lze ukázat [71], že stratifikací se obvykle dosáhne snížení rozptylu ve srovnání s jednoduchou metodou Monte Carlo. Efektivnost stratifikovaného výběru roste přibližně se čtvercem počtu oblastí [35]. Jako nejjednodušší způsob stratifikace se používá ekvidistantní dělení, ačkoli vhodnou volbou oblastí lze rozptyl dále snižovat. Pokud máme k dispozici potřebné apriorní znalosti, doporučuje se volit oblasti tak, aby rozptýlenost funkce $g(x)$ byla ve všech oblastech přibližně stejná [35]. Velikost rozptylu dále závisí na volbě počtů simulací v jednotlivých oblastech. Minimálního rozptylu lze dosáhnout, pokud počet simulací v každé oblasti je úměrný druhé odmocnině z rozptylu V_j^2 v této oblasti [71].

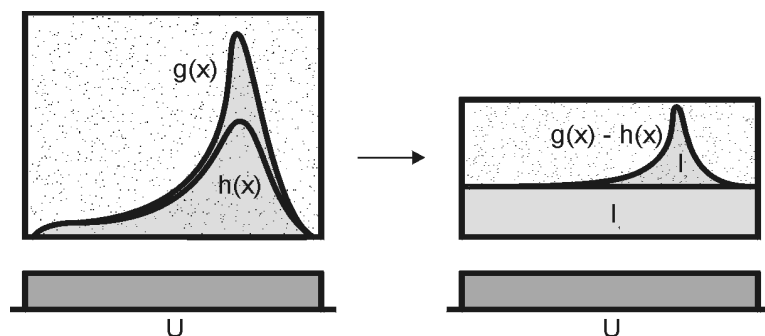
2.5.3.3 Metoda řídicích proměnných

Pokud dovedeme určit tzv. řídicí funkci $h(x)$, která se příliš neliší od funkce $g(x)$ a má známou hodnotu integrálu

$$I_1 = \int_0^1 h(x) dx \tag{2.5.3.9/}$$

Lze použít metodu řídicích proměnných (korelovaný výběr, vymezení hlavní části). Hledaný integrál /2.5.3.1/ je možné vyjádřit

$$I = \int_0^1 h(x) dx + \int_0^1 (g(x) - h(x)) dx = I_1 + I_2 \tag{2.5.3.10/}$$



Obr. 2.5.3.4: Metoda řídicích proměnných

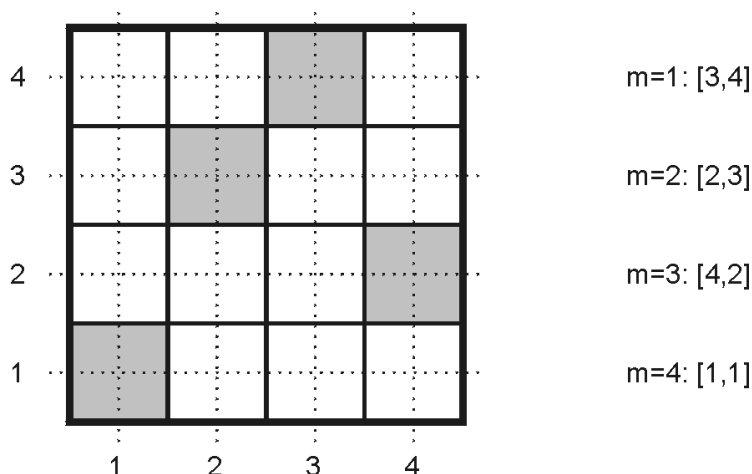
Hodnotu I_1 známe, viz /2.5.3.9/ a za odhad hodnoty I_2 vezmeme veličinu

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(X_i) - h(X_i)) \quad /2.5.3.11/$$

kde X_i je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $U(0,1)$. Lze ukázat (viz [35]), že pro $g(x) \approx h(x)$ je hodnota rozptylu odhadu $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$ malá, a tím je malá i chyba uvedeného postupu ve srovnání s jednoduchou metodou Monte Carlo.

2.5.3.4 Metoda Latin hypercube

V případech, kdy je třeba určit n parametrů a je možné provést jen omezený počet m pokusů, lze využít vzorkovací schéma Latin hypercube sampling (LHS) [39]. Oblast je rozdělena na m^n podoblastí. Vzorkovány jsou pouze vybrané podoblasti, každá vybraná podoblast je vzorkována jen jednou. Výběr podoblastí je založen na zobecnění latinských čtverců (viz obrázek 2.5.3.5) pro n rozměrů.



Obr. 2.5.3.5: Latinský čtverec

V kroku m je vybrána oblast o souřadnicích a_1^m, \dots, a_n^m . V žádném dalším kroku nesmí být vybrána žádná oblast mající libovolnou souřadnici shodnou. Pro všechny oblasti tedy platí

$$\begin{aligned} a_1^1 &\neq a_1^2 \neq \dots \neq a_1^m \\ a_2^1 &\neq a_2^2 \neq \dots \neq a_2^m \\ &\vdots \\ a_n^1 &\neq a_n^2 \neq \dots \neq a_n^m \end{aligned} \quad /2.5.3.12/$$

Použité vzorkovací schéma zajistí, že každý parametr je testován právě jednou v každém ze svých podrozsahů. V některých případech lze uvedenou metodou získat použitelné odhady parametrů již při použití velmi malého počtu kroků. Pokud je vliv jednoho parametru na chování systému dominantní, lze tento parametr uvedeným způsobem nalézt. V případech významných interakcí mezi parametry nebývá použití této metody výhodné [71].

2.5.3.5 Metody kvazi-Monte Carlo

K modifikacím metody Monte Carlo patří i kvazi-Monte Carlo metody, které se objevily v padesátých letech dvacátého století. Bylo zjištěno, že některé typy úloh nedávají při použití metod Monte Carlo dobré výsledky, případně vykazují při použití náhodných čísel pomalou konvergenci. Některé z těchto problémů bylo možno odstranit, pokud byla pro řešení použita posloupnost vhodně zvolených čísel. Tato čísla byla nazvána kvazináhodnými čísly a metody využívající posloupností těchto čísel metodami kvazi-Monte Carlo. Tyto metody lze chápat jako deterministickou verzi metod Monte Carlo [27]. Jelikož metody Monte Carlo využívající posloupností pseudonáhodných čísel jsou ve skutečnosti také deterministické, metody kvazi-Monte Carlo jen dále zdůrazňují rovnoměrnost použitých posloupností na úkor náhodnosti. Použití těchto metod může zmírnit některé nevýhody klasických metod Monte Carlo a odstranit problémy s generováním náhodných čísel. Metody kvazi-Monte Carlo mohou přinést problémy jako je pomalá konvergence mnohorozměrných úloh a obtížné stanovení chyb metody [66].

2.5.4 Typické úlohy řešené metodou Monte Carlo

Metodu Monte Carlo lze použít pro řešení pravděpodobnostních i deterministických úloh [66]. Pro řešení deterministických problémů je třeba tyto problémy převést na řešení problémů stochastických. Metoda Monte Carlo je obvykle demonstrována na jednoduchých jednorozměrných příkladech, které lze často efektivněji řešit i jinými metodami. Použití metody Monte Carlo bývá výhodnější při řešení vícerozměrných úloh [69]. Mnoho typů úloh lze např. převést na řešení vícerozměrných integrálů. Určení výsledků bývá založeno na odhadu střední hodnoty nebo pravděpodobnosti. Pomocí centrální limitní věty lze ukázat, že za velmi obecných předpokladů má střední hodnota odhadnuté veličiny asymptoticky normální rozdělení, bez ohledu na rozdělení vstupních veličin. Ze vztahů uvedených v kapitole 2.5.2 vyplývá, že se směrodatná odchylka zmenšuje s $n^{-1/2}$ a tím i chyba výsledků klesá s $n^{-1/2}$, kde n je počet dat. Tato rychlost poklesu chyby v metodě Monte Carlo nezávisí na dimenzi řešeného problému. Chyba ostatních numerických metod pro získání přibližného řešení v m -rozměrném prostoru klesá v obecných případech přinejlepším s $n^{-1/m}$ [43, 68].

2.5.4.1 Deterministické úlohy

Typickou deterministickou úlohou, řešenou metodou Monte Carlo, je výpočet hodnoty určitého integrálu. Nejjednodušší postup výpočtu lze demonstrovat na příkladě výpočtu jednorozměrného určitého integrálu

$$I = \int_a^b g(x) dx \quad /2.5.4.1/$$

Základní jednoduchá (obyčejná) metoda Monte Carlo využívá pro výpočet náhodná čísla s rovnoměrným rozdělením. Při postupu výpočtu založeném na určení střední

hodnoty [14] lze použít rovnoměrné rozdělení $U(a,b)$, jehož funkce hustoty pravděpodobnosti na intervalu $[a,b]$ je $f(x) = \frac{1}{(b-a)}$. Potom lze hodnotu integrálu /2.5.4.2/ považovat za střední hodnotu μ_g funkce $g(x)$.

$$I = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b g(x) f(x) dx = \frac{1}{(b-a)} \mu_g \quad /2.5.4.2/$$

Hodnotu μ_g odhadujeme pomocí výběrového průměru \bar{G} , tedy použijeme aritmetický průměr \bar{g} hodnot $g(x_i)$, získaných simulací. Za odhad hodnoty I lze tedy vzít hodnotu \hat{I}

$$\hat{I} = \frac{1}{(b-a)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \right) \quad /2.5.4.3/$$

kde x_i jsou náhodná čísla z rovnoměrného rozdělení U .

Při postupu výpočtu založeném na určení pravděpodobnosti lze předchozí úlohu řešit jako výpočet plochy. Je-li funkce $g(x)$ taková, že platí $0 \leq g(x_i) \leq c$, pak pro dvě nezávislé náhodné veličiny X a Y , s rovnoměrnými rozděleními $U(a,b)$ a $U(0,c)$ je

$$p = P[g(X) \geq Y] = \frac{I}{c} \quad /2.5.4.4/$$

Při simulacích jsou generovány dvojice realizací x_i, y_i veličin X a Y a zaznamenáván počet n_s případů, pro které $g(x_i) \geq y_i$. Odhadem \hat{p} pravděpodobnosti p je počet n_s dělený celkovým počtem pokusů n

$$\hat{p} = \frac{n_s}{n} \quad /2.5.4.5/$$

Odhadem veličiny I je tedy

$$\hat{I} = c \hat{p} = c \frac{n_s}{n} \quad /2.5.4.6/$$

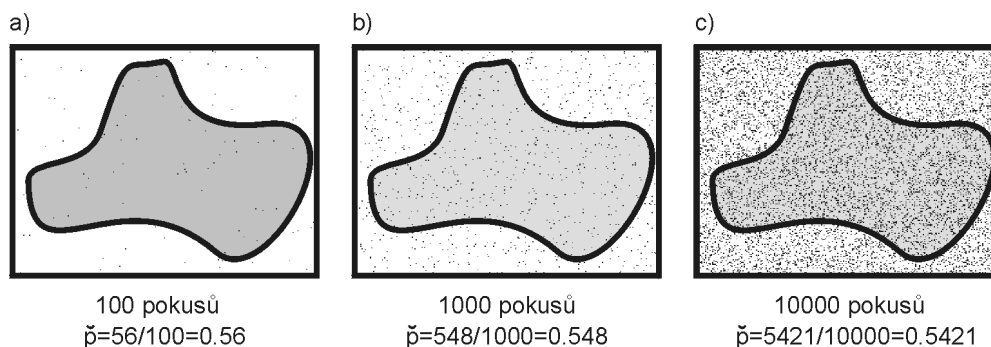
Lze ukázat [35], že rozptyl odhadu podle /2.5.4.6/ je větší nebo roven rozptylu odhadu podle /2.5.4.3/, navíc je třeba pro výpočet založený na určení pravděpodobnosti generovat v každém kroku dvojici náhodných čísel. Výpočet touto metodou je tedy obvykle méně efektivní než výpočet založený na určení středí hodnoty. V některých případech je však tato metoda výhodnější, neboť není třeba počítat funkční hodnoty funkce $g(x)$ ale pouze zjišťovat platnost vztahu $g(x) \geq y$. To je výhodné, např. pokud je funkce $g(x)$ vyjádřená v implicitním tvaru.

V následujícím příkladě se má určit plocha vymezená uzavřenou křivkou, znázorněnou na obrázku 2.5.4.1. Celou oblast lze ohraničit obdélníkem s plochou $A_0 = 30 \times 40 = 1200 \text{ mm}^2$. Při řešení metodou Monte Carlo lze náhodně vybírat body

uvnitř obdélníku a zaznamenávat v kolika případech vybraný bod padl do oblasti vymezené křivkou. Tento počet n_s dělený celkovým počtem pokusů n udává relativní četnost $p = \frac{n_s}{n}$ výskytu bodu ve vymezené oblasti, která je úměrná poměru velikosti

plochy oblasti k ploše obdélníku $\frac{A}{A_0}$. Velikost plochy oblasti lze tedy odhadnout jako

$$A = A_0 p$$

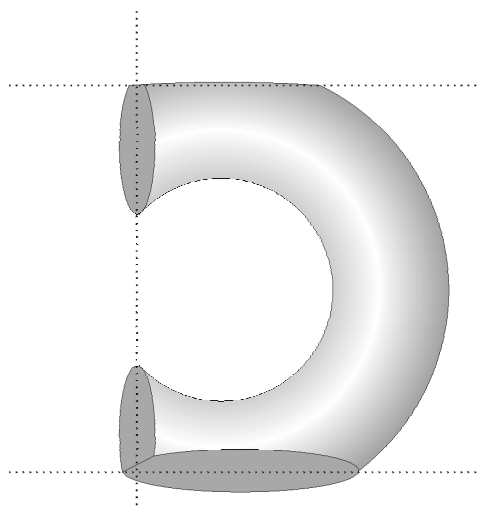


Obr. 2.5.4.1: Určení plochy metodou Monte Carlo

Relativní četnosti získané po 100, 1000 a 10 000 pokusech jsou zaznamenány na obrázku 2.5.4.1. Zjištěným četnostem odpovídají odhady plochy vymezené oblasti

$A = 627 \text{ mm}^2$, $A = 657,6 \text{ mm}^2$ a $A = 650,52 \text{ mm}^2$. Přesná velikost plochy, určená analytickým výpočtem je $A = 650 \text{ mm}^2$. Porovnání hodnot ukazuje očekávané zvyšování přesnosti výsledků se vzrůstajícím počtem provedených pokusů.

Dalším typem úloh vhodných k řešení metodou Monte Carlo je výpočet hodnoty určitého integrálu, u něhož není snadné vyjádřit integrační oblast v explicitním tvaru. Příkladem může být výpočet objemu tělesa znázorněného na obrázku 2.5.4.2. Torus je omezen několika rovinami, popsat vzniklé těleso explicitním výrazem je obtížné, ale snadno lze zjistit, zda daný bod leží nebo neleží uvnitř zkoumaného tělesa [71].



Obr. 2.5.4.2: Torus omezený rovinami

2.5.4.2 Stochastické úlohy

Jedním ze stochastických problémů, které lze řešit metodou Monte Carlo, je hledání rozdělení náhodných veličin. Mějme náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n a funkci $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Hledáme rozdělení náhodného vektoru $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ takové, že $Y = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pro některé speciální případy funkcí h lze pro určení rozdělení veličin Y použít explicitních vztahů platných pro některá rozdělení a transformace. V tabulce 2.5.4.1 jsou uvedeny příklady vztahů, platných pro stochasticky nezávislé náhodné veličiny.

Vstupní rozdělení X_i	Transformace	Výstupní rozdělení Y
Normální $N(\mu_i, \sigma_i)$	$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$	Normální $N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2}\right)$
Normální $N(0, 1)$	$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$	$\chi^2(n)$
Poissonovo $Po(\lambda_i)$	$Y = \sum_{i=1}^n X_i$	Poissonovo $Po(\sum \lambda_i)$
Binomické $Bi(n_i, p)$	$Y = \sum_{i=1}^n X_i$	Binomické $Bi(\sum n_i, p)$
Alternativní $A(p)$	$Y = \sum_{i=1}^n X_i$	Binomické $Bi(n, p)$

Tabulka 2.5.4.1: Transformace vybraných rozdělení

Pro aproximaci rozdělení veličin Y lze v některých případech použít také asymptotických vztahů pro posloupnosti náhodných veličin, plynoucích z centrální limitní věty [60]. Příklady jsou uvedeny v tabulce 2.5.4.2 a platí pro nezávislá rozdělení.

Vstupní rozdělení X_i	Podmínky	Výstupní rozdělení Y
Stejná rozdělení X_i , $\mu_i = \mu, \sigma_i = \sigma$	$i \rightarrow \infty$	$N(0, 1)$
$\chi^2(i)$	$i \rightarrow \infty$	$N(0, 1)$
$Bi(i, p)$	$i \rightarrow \infty$	$N(0, 1)$
$t(i)$	$i \rightarrow \infty$	$N(0, 1)$
$Bi(i, P_i)$	$i \rightarrow \infty, P_i \rightarrow 0, iP_i = \lambda$	$Po(\lambda)$

Tabulka 2.5.4.2: Aproximace vybraných rozdělení

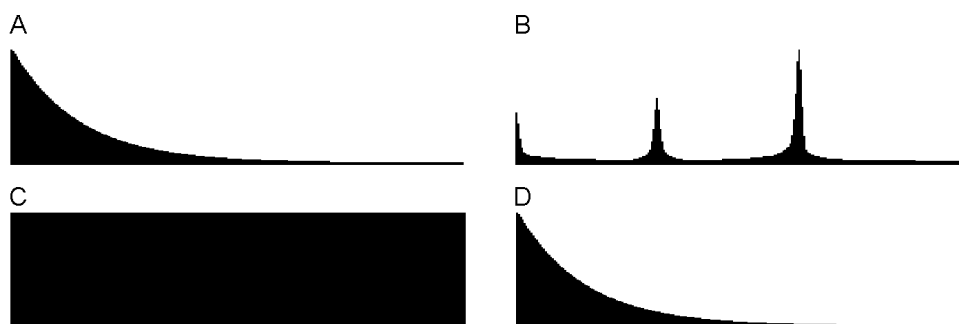
Použitelnost výše uvedených teoretických výsledků je však omezená. V případech složitějších nelineárních funkcí nelze explicitních vztahů ani aproximací použít. Přímý analytický výpočet bývá obvykle prakticky neproveditelný, a proto bývá často pro získání informací o výstupním rozdělení použito metody Monte Carlo.

Máme-li realizace x_1, x_2, \dots, x_n náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n , získáme realizaci náhodné veličiny Y dosazením hodnot x_1, x_2, \dots, x_n do funkce h . Výsledek zaznamenáme, postup mnohokrát opakujeme a dostaneme empirické rozdělení veličiny Y , obvykle ve formě histogramu četností.

V následujícím příkladě hledáme rozdělení veličiny H , která je funkcí g čtyř náhodných veličin A, B, C a D .

$$H = g(A, B, C, D) = 1.22A + 5.3B - \sin(C) \ln(D + 1) \quad /2.5.4.7/$$

Veličina A má exponenciální rozdělení s parametrem $b = 1,0$; B má trimodální rozdělení definované na intervalu $[0,1]$ získané na základě vyhodnocení experimentálních dat; C má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$; a D má exponenciální rozdělení s parametrem $b = 2,0$. Tvary jednotlivých funkcí hustoty pravděpodobnosti jsou na 2.5.4.3.



Obr. 2.5.4.3: Grafy hustot pravděpodobností vstupních veličin A, B, C a D .

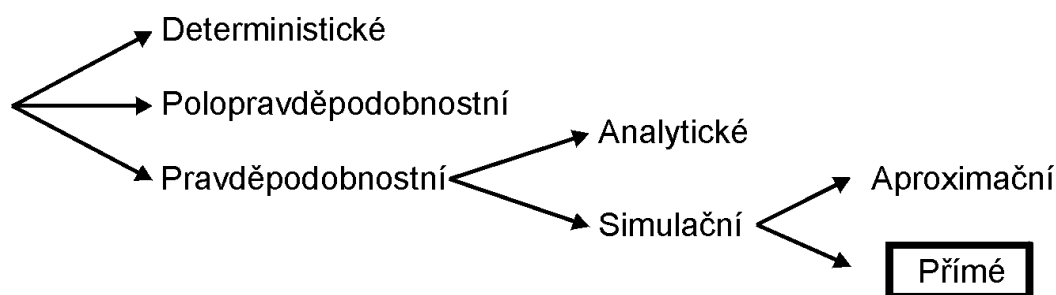
Při řešení metodu Monte Carlo v každém kroku vygenerujeme vektor (čtveřici náhodných čísel) realizací vstupních náhodných veličin A, B, C a D . Vypočítáme hodnotu funkce g a výsledek zaznamenáme. Po provedení velkého počtu kroků máme k dispozici posloupnost hodnot h_i . Empirické rozdělení vygenerované posloupnosti podle zákona velkých čísel s rostoucím počtem kroků konverguje k rozdělení veličiny H . Tvar funkce hustoty pravděpodobnosti, zkonstruovaný po 30 000 krocích je na obrázku 2.5.4.4.



Obr. 2.5.4.4: Empirické rozdělení veličiny H – histogram

3 Metody pro určování spolehlivosti konstrukcí

Při navrhování konstrukcí je jedním z důležitých úkolů posouzení spolehlivosti konstrukce, při čemž spolehlivostí konstrukce se rozumí její schopnost zachovávat požadované vlastnosti po stanovenou dobu technického života. Kvalita používaných metod navrhování a posuzování konstrukcí se vyvíjí s rostoucí úrovní teoretických a praktických znalostí a zvyšujícími se možnostmi výpočetních prostředků, viz obrázek 3.1. Nepříliš výkonné výpočetní prostředky – tabulky, logaritmická pravítka, mechanické a později elektronické kalkulátory dovolovaly použití pouze takových metod, které za cenu významných zjednodušení dosáhly přiměřeného snížení výpočetní náročnosti. Proto nejstarší deterministické metody, jako například metoda dovolených namáhání [62], zcela zanedbávají náhodný charakter vstupních veličin. Metody polopravděpodobnostní, například metoda dílčích součinitelů, vyjadřují zjednodušeně vliv náhodnosti vstupních veličin pomocí korekčních koeficientů. Použité modely nadále zůstávají ve své podstatě modely deterministickými [62]. Metody pravděpodobnostní, využívající analytického řešení (FORM, SORM, atd.), jsou nuceny zavádět zjednodušující předpoklady jak na straně vstupních náhodných veličin (rozdělení všech náhodných veličin jsou považována např. za normální nebo lognormální), tak na straně výpočetního modelu (interakce jsou považovány za lineární, nebo jsou linearizovány) [31, 32, 7, 19]. Teprve rychlý rozvoj informačních technologií, výpočetní techniky a především dostupnost výkonných osobních počítačů vytváří předpoklady k přechodu k plně pravděpodobnostnímu pojetí posudku spolehlivosti konstrukcí, při čemž významným prvkem je využití simulačních technik [80, 39, 9]. Pokud jsou rozdělení hledaných veličin aproximována některými z teoretických rozdělení, hovoříme o aproximačních metodách, pokud jsou k výpočtům použity přímo empirická rozdělení, získaná simulací, hovoříme o metodách přímých. Aplikace simulačních technik umožňuje řešení řady úloh dříve prakticky neřešitelných. Pomocí simulačních postupů lze také přehledně posuzovat některé situace, jako je například vliv kombinace vícekomponentních účinků zatížení, o kterých se předchozí metody nezmiňovaly.



Obr. 3.1: Přehled metod

K pravděpodobnostním metodám, založeným na využití simulace, metody Monte Carlo a přímém statistickém vyhodnocování četnosti sledovaných jevů, patří metoda SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment), popsaná dále.

3.1 Deterministické metody

Deterministické metody, pocházející z devatenáctého století, jsou historicky nejstaršími metodami pro navrhování a posuzování spolehlivosti konstrukcí. První z nich, metoda dovolených namáhání [62], byla do nedávné doby nejrozšířenější a nejpoužívanější metodou pro posuzování spolehlivosti všech typů stavebních konstrukcí.

Veškerá zatížení, materiálové i geometrické vlastnosti jsou považovány za deterministické. Zatížení se z hlediska metody dovolených namáhání třídí na hlavní, vedlejší a mimořádná a účinky zatížení S_{max} jsou vyjádřeny jako nejnepříznivější kombinace napětí σ_{max} od jednotlivých normovaných zatížení. Dovolené namáhání R_{dov} je odvozené z kritického namáhání (meze kluzu) R_{krit} , určeného na základě materiálových zkoušek.

$$R_{dov} = \frac{R_{krit}}{k} \quad /3.1.1/$$

Návrhová podmínka je potom vyjádřena jako

$$S_{max} \leq R_{dov} = \frac{R_{krit}}{k} \quad /3.1.2/$$

Hodnota R_{dov} je vyjádřena jako dovolené napětí σ_{dov} a hodnota R_{krit} jako normované maximální napětí σ_{krit} . Maximální napětí σ_{max} , vyvolané zatížením musí být menší nebo rovné dovolenému namáhání σ_{dov}

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dov} = \frac{\sigma_{krit}}{k} \quad /3.1.3/$$

Základní podmínku, na níž je založena metoda dovolených namáhání, lze tedy vyjádřit pomocí součinitele bezpečnosti k

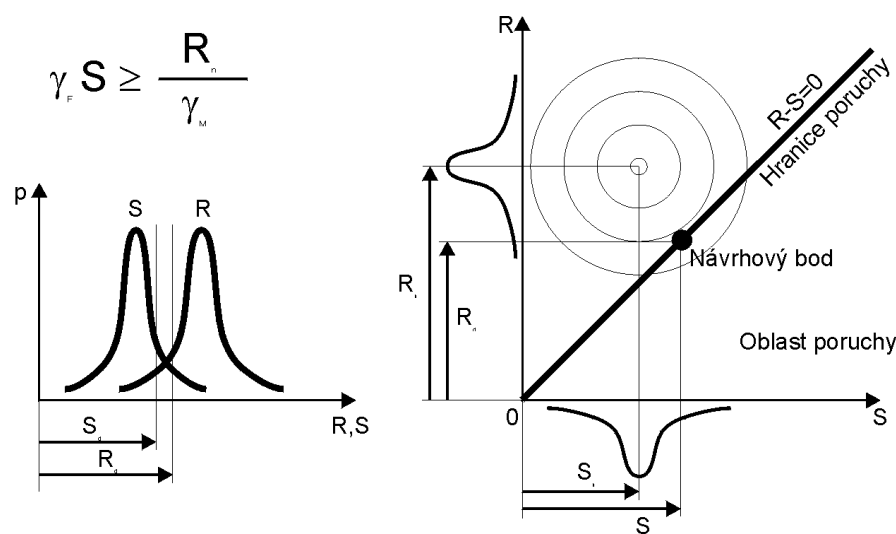
$$k \leq \frac{R_{krit}}{S_{max}} \quad /3.1.4/$$

Požadovaná spolehlivost konstrukce je zajištěna aplikací normami předepsané hodnoty součinitele bezpečnosti k , považovaného za míru bezpečnosti. Hodnoty koeficientu k se liší podle typů konstrukcí, druhů zatížení i použitých materiálů, viz např. [15]. Součinitel k zahrnuje veškeré nejistoty jak na straně zatížení tak na straně odolnosti materiálu. Tyto nejistoty jsou implicitně obsažené ve způsobu určování zatížení, dovolených namáhání i rozložení napětí v systému.

Metoda stupně bezpečnosti z poloviny devatenáctého století je používána především v oboru betonových konstrukcí. Spolehlivost konstrukce je ovlivňována volbou požadovaného stupně bezpečnosti s_0 , zahrnujícího opět veškeré nejistoty obsažené v modelu na straně zatížení i na straně odolnosti materiálu. Stupeň bezpečnosti je stanoven normami v závislosti na typu a důležitosti konstrukce.

3.2 Polopravděpodobnostní metody

Pro přesnější vystižení vlastností veličin, charakterizujících jednotlivá zatížení, materiálové a geometrické vlastnosti konstrukcí nastal v druhé polovině dvacátého století postupný přechod k aplikaci polopravděpodobnostních metod pro navrhování a posuzování konstrukcí. Polopravděpodobnostní metody reprezentuje především metoda dílčích součinitelů, která je v současné době použita v mnoha normách pro navrhování konstrukcí. Tato metoda je založena na koncepci mezních stavů při uvažování náhodného charakteru vstupních veličin. Mezní stav je situace, kdy konstrukce přestává vyhovovat návrhovým kritériím. Nejistoty náhodně proměnných veličin jsou rozděleny na stranu zatížení a stranu odolnosti. Vstupní veličiny jsou reprezentovány tzv. charakteristickou (normovou) hodnotou a při určování kombinace vstupních veličin jsou jejich charakteristické hodnoty upravovány dílčími součiniteli. Při určování hodnot součinitelů se předpokládají jednoduchá rozdělení vstupních veličin (normální, lognormální), jejich jednoduché vztahy (součty, součiny) i srovnatelný vliv všech vstupních veličin. To umožňuje s využitím vztahů uvedených v tabulkách 2.5.4.1 a 2.5.4.2 snadné analytické řešení i v některých případech složitých kombinací. Zanedbávání skutečných statistických vlastností vstupních náhodných veličin nedovoluje přímé určení pravděpodobnosti poruch a pod. Pomocí součinitelů jsou vyjádřeny kombinace zatížení, stav konstrukce, kvalita materiálu, výrobní nepřesnosti i koncepce a přesnost výpočetních postupů.



Obr. 3.2.1: Metoda dílčích součinitelů

Základní podmínku pro posouzení spolehlivosti lze vyjádřit výrazy

$$S_d \leq R_d \quad /3.2.1/$$

a

$$\gamma_S S_n \leq \frac{R_n}{\gamma_R} \quad /3.2.2/$$

kde S_d je návrhová hodnota účinku zatížení a R_d je návrhová hodnota odolnosti. S_n je charakteristická (normová) hodnota účinku zatížení a R_n je charakteristická hodnota

odolnosti. γ_s a γ_R jsou součinitelé spolehlivosti zatížení a odolnosti. Situace je schematicky znázorněna na obrázku 3.2.1.

Charakteristické hodnoty S_n a R_n jsou stanoveny na základě norem. Návrhové hodnoty S_d a R_d jsou z charakteristických hodnot vypočteny pomocí modifikačních součinitelů γ_s a γ_R . Tyto součinitelé explicitně vyjadřují nejistoty vyplývající z nepřesností a náhodného charakteru vstupních veličin i použitých modelů. Bod $[S_d, R_d]$, odpovídající kombinaci návrhových hodnot účinků zatížení S_d a odolnosti R_d , zvaný návrhový bod, leží na hranici poruchy – přímce $S = R$, která rozděluje množinu možných interakcí S a R na oblast poruchy $S > R$ a oblast spolehlivosti $S \leq R$. I když je metoda dílčích součinitelů založena na pravděpodobnostním teoretickém modelu, zůstává její interpretace z hlediska uživatelů deterministickou [62].

3.3 Pravděpodobnostní metody

Pro určení spolehlivosti konstrukcí pravděpodobnostními metodami jsou nejprve definována kritéria spolehlivosti na základě funkcionálního vztahu mezi vstupními veličinami, zvanými základní proměnné X_i . Tento vztah se nazývá funkce bezpečnosti, spolehlivosti, použitelnosti, funkce rezervy spolehlivosti, někdy též funkce poruchy.

$$Z = G(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad /3.3.1/$$

Mezní stav, tedy hranice poruchy je definován jako

$$Z = 0 \quad /3.3.2/$$

Tato hranice poruchy dělí prostor návrhových parametrů na oblast poruchy $Z < 0$ a oblast spolehlivosti $Z \geq 0$. Rovnice mezního stavu může být vyjádřena funkcí v explicitním i implicitním tvaru. Pro spojitě náhodné základní proměnné X_i lze pro funkci bezpečnosti /3.3.1/ určit pravděpodobnost poruchy

$$p_f = \int \dots \int_{g = \{(X_1, \dots, X_n) | G(X_1, \dots, X_n) < 0\}} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad /3.3.3/$$

$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je sdružená funkce hustoty pravděpodobnosti základních proměnných X_i . Jsou-li veličiny x_i statisticky nezávislé, lze sdruženou funkci hustoty pravděpodobnosti veličin x_i nahradit součinem jednotlivých hustot

$$p_f = \int \dots \int_{g = \{(X_1, \dots, X_n) | G(X_1, \dots, X_n) < 0\}} \prod_{i=1}^n f_i(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad /3.3.4/$$

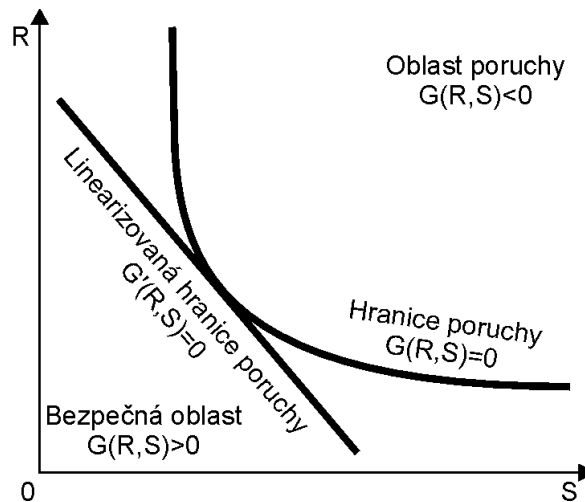
Integrace je prováděna přes celou oblast poruchy g , to je oblast pro kterou je $G(X_1, X_2, \dots, X_n) < 0$. Ve většině praktických případů je nemožné určit funkci f . Pokud se podaří funkci f určit nebo aproximovat, bývá nemožné analyticky vypočítat hodnotu integrálu. Proto byla vytvořena řada metod pro určování spolehlivosti založených na různých způsobech aproximace, přibližných výpočtů nebo postupů platných za určitých omezujících podmínek.

3.3.1 Analytické metody

Jedním z možných postupů určení pravděpodobnosti poruchy je aproximace integrálu /3.3.3/. Metody FORM a SORM [31, 32] využívají rozdílných typů aproximace.

Metody FORM (First Order Reliability Method) používají lineární aproximaci funkce poruchy. Původní metoda FORM je použitelná v případě, že funkce poruchy je lineární kombinací nekorelovaných veličin s normálním rozdělením, případně lze funkci poruchy lineární funkcí nekorelovaných veličin s normálním rozdělením aproximovat. Tato metoda používá pouze střední hodnoty a nebere ohled na skutečná rozdělení náhodných veličin. Proto byly vytvořeny metody využívající i druhý statistický moment náhodných veličin – FOSM (First Order Second Moment), nazývaná také MVFOSM (Mean Value First Order Second Moment) a AFOSM (Advanced First Order Second Moment).

V případě FOSM je funkce poruchy aproximována Taylorovým polynomem prvního řádu (linearizována).



Obr. 3.3.1.1: Metoda FOSM

Předpokládá se statistická nezávislost všech náhodných veličin a jejich normální nebo lognormální rozdělení, popsané prvními dvěma momenty – střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ . Funkce poruchy je v nejjednodušším případě definována v dvojrozměrném R - S prostoru

$$Z = R - S \quad /3.3.1.1/$$

kde odolnost R i účinky zatížení S jsou nezávislé veličiny mající normální rozdělení $N(\mu_R, \sigma_R)$ a $N(\mu_S, \sigma_S)$. Pak má veličina Z normální rozdělení $N(\mu_Z, \sigma_Z)$ s distribuční funkcí F_Z . Pravděpodobnost poruchy lze vyjádřit

$$p_f = P[Z < 0] = F_Z(0) = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)}}\right) \quad /3.3.1.2/$$

kde Φ je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení $N(0,1)$. Pravděpodobnost poruchy závisí na poměru střední hodnoty μ_Z a směrodatné odchylky σ_Z funkce poruchy Z , což je již v metodě částečných součinitelů používaný index spolehlivosti $\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$, viz /3.2.3/. Z /3.3.1.2/ je potom pravděpodobnost poruchy

$$p_f = 1 - \Phi(\beta) \quad /3.3.1.3/$$

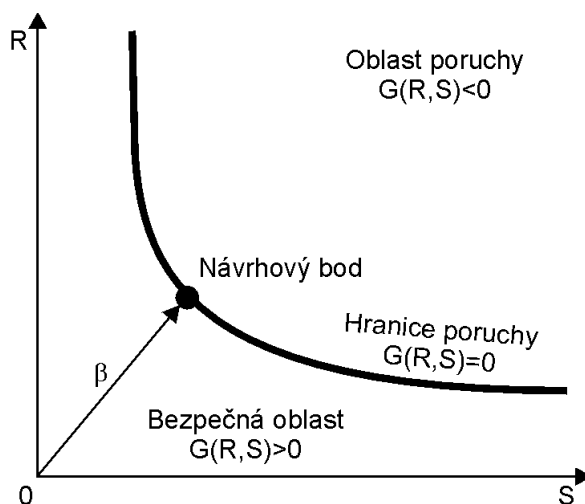
Jelikož mnoho užívaných fyzikálních veličin nabývá pouze kladných hodnot, je někdy výhodnější použít pro veličiny R a S lognormálního rozdělení. Pak lze funkci poruchy definovat

$$Y = \frac{R}{S} \quad /3.3.1.4/$$

Veličina $Z = \ln Y = \ln R - \ln S$ má opět normální rozdělení.

Uvedené postupy lze zobecnit pro větší počet náhodných veličin X_i , a funkci poruchy ve tvaru /3.3.1/. Pomocí indexu spolehlivosti β , určeného metodou FOSM, lze pravděpodobnost poruchy p_f určit přesně jen v několika speciálních případech. Všechny náhodné veličiny musí být nezávislé, pokud mají normální rozdělení, musí být funkce poruchy lineární funkcí, pokud mají lognormální rozdělení, musí být funkce poruchy multiplikativní funkcí. Souřadnice návrhového bodu jsou odvozeny z hodnot μ_i jednotlivých náhodných veličin.

Metoda AFOSM opět předpokládá nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením. Veličiny s jiným rozdělením jsou nahrazovány veličinami s tzv. ekvivalentním normálním rozdělením. Souřadnicový systém n -rozměrného návrhového prostoru je transformován tak, aby index spolehlivosti β udával vzdálenost k nejbližšímu bodu, ležícímu na hranici poruchy.



Obr. 3.3.1.2: Metoda AFOSM

Tento bod je potom návrhovým bodem. Nalezení minimální vzdálenosti od počátku souřadnic může být obtížně řešitelným optimalizačním problémem, protože může

existovat více lokálních i absolutních minim, atd. Jedním z navržených řešení je aproximace grafu funkce poruchy n -rozměrným mnohostěnem [19].

V případech, kdy metody FORM poskytují příliš nepřesný odhad pravděpodobnosti poruchy p_f v důsledku významných nelinearit funkce poruchy, lze metod SORM (Second Order Reliability Method). Tyto metody využívají pro aproximaci funkce poruchy prvních dvou členů Taylorova rozvoje v návrhovém bodě, provádějí tedy kvadratickou aproximaci funkce poruchy v návrhovém bodě [7]. Tyto metody poskytují přesnější výsledky než metody FORM, ale problémy související s určením návrhového bodu zůstávají.

3.3.2 Simulační metody

Pravděpodobnostní simulační metody, v přehledu na obrázku 3.1 označené jako aproximační, jsou založeny na odhadu typů a parametrů rozdělení výstupních veličin a následném určování hledané spolehlivosti. Rozdělení hledaných veličin je aproximováno některým z teoretických rozdělení a pro odhad hodnot jeho parametrů je použita metoda Monte Carlo. Pro toto rozdělení je potom určena spolehlivost, vyjádřená pravděpodobností poruchy, jako hodnota příslušného kvantilu. Pokud je pro určení spolehlivosti použito postupů založených na určení parametrů rozdělení, lze pro zvýšení přesnosti a tím i snížení potřebného počtu simulačních kroků použít metod pro snížení rozptylu popsanych v kapitole 2.5.3.

Při použití metody Latin hypercube sampling [39] lze po provedení relativně malého počtu simulačních kroků získat soubor realizací výstupní veličiny Z , z něhož je možné určit odhad charakteristik hledaného rozdělení a najít vhodnou funkci pro aproximaci funkce hustoty pravděpodobnosti.

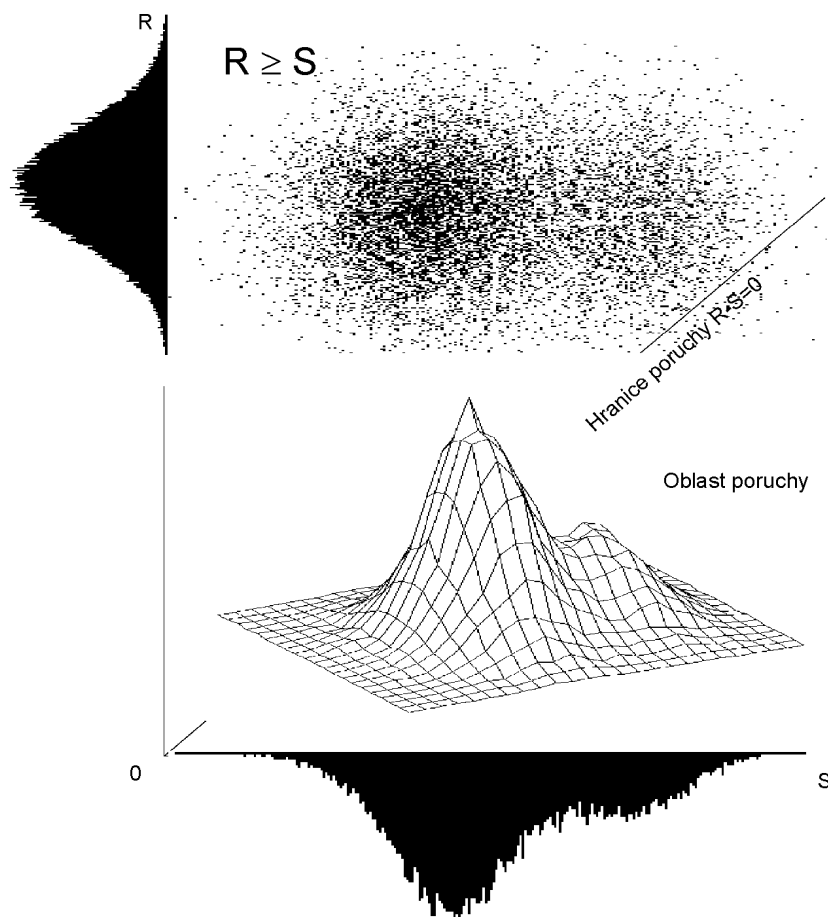
Další možností je metoda aproximace oblasti poruchy (response surface), založená na aproximaci funkce G ze vztahu /3.3.1/ vhodným polynomem. Často se používá aproximace ve tvaru

$$G' = a + \sum_{i=1}^m b_i X_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} X_i X_j \quad /3.3.2.1/$$

K provádění simulací je pak namísto funkce G použita funkce G' , která je efektivněji vyčíslitelná.

Počet potřebných simulačních kroků lze snížit s použitím metody výběru podle důležitosti [80, 38], popsané v kapitole 2.5.3.1. Při ní je koncentrován výběr do oblasti poruchy kolem návrhového bodu. Určení polohy návrhového bodu působí obdobné obtíže jako v případě metod FORM a SORM. Podobně je v obecných případech nesnadné vytvoření vhodné váhové funkce, koncentrující výběr do požadované oblasti.

Metoda SBRA, popsaná dále, je podle přehledu uvedeného na obrázku 3.1 metodou přímou. Úloha určení hodnoty integrálu /3.3.3/ je řešena na základě znalosti spolehlivostní funkce /3.3.1/ přímou analýzou empirické funkce hustoty pravděpodobnosti f_X , získané simulací Monte Carlo. Základní princip pro případ dvojrozměrné funkce hustoty pravděpodobnosti $f_{X,Y} = f_{RS}$ a podmínky spolehlivosti $R \geq S$ je znázorněn na obrázku 3.3.2.2.



Obr. 3.3.2.2: Metoda SBRA – empirické rozdělení a spolehlivostní funkce

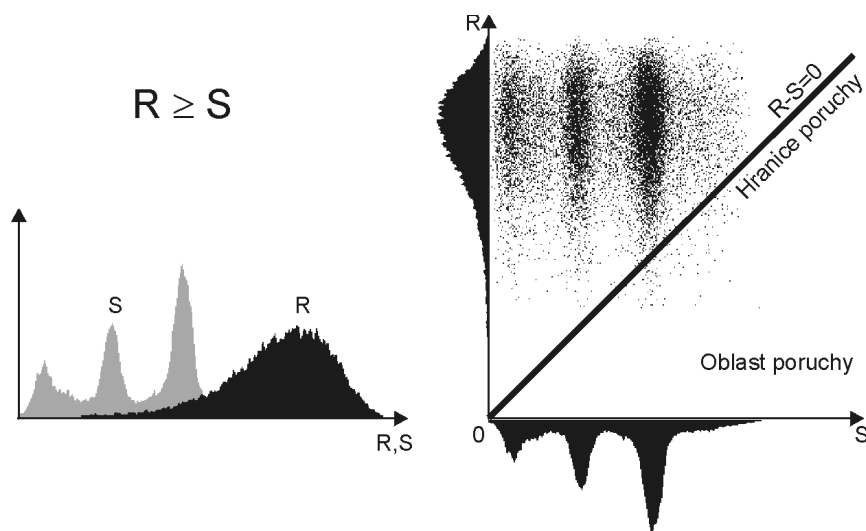
Zavedení funkce bezpečnosti jako vztahu mezi účinky zatížení, mechanickými a geometrickými vlastnostmi konstrukce a dalšími veličinami (viz vztah /3.3.1/) v první polovině dvacátého století a mezní stav, definovaný na základě této funkce jako hranice poruchy, umožňuje při uvažování náhodného charakteru vstupních veličin plně pravděpodobnostní výpočet spolehlivosti konstrukcí. Jak je ukázáno v kapitole 3.3, je přímý analytický výpočet v běžných případech prakticky neproveditelný a proto byla vytvořena řada metod pro určování spolehlivosti, využívajících různých způsobů aproximace a přibližných výpočtů. Tyto metody jsou založené jak analytické tak i na simulační analýze.

Mezi simulační metody patří i metoda SBRA, vytvořená s cílem využít dostupných výkonných osobních počítačů ke kvalitativnímu zdokonalení posudku spolehlivosti konstrukcí, umožňujícímu přechod od deterministického k pravděpodobnostnímu pojetí posudku spolehlivosti. Vývoj metody SBRA započal v roce 1987, dosažené výsledky byly prezentovány na mnoha konferencích, publikovány v desítkách článků a několika knižních publikacích (1995 [54], 1998 [55] a 2001 [50]). Stručná historie vývoje metody SBRA je uvedena v Příloze B. V rámci vývoje metody SBRA bylo vytvořeno několik specializovaných programů pro řešení dílčích problémů – ResCom, LoadCom, MatCom a DamAc a dva programy univerzální, použitelné i mimo rámec metody SBRA – M-Star a Anthill. Vytvořené programy byly použity pro řešení stovek příkladů z různých oblastí posudku spolehlivosti, což potvrzuje mnohostrannost a praktickou použitelnost navržené metody [50, 47, 85, 82, 72]. Přehled vytvořených programů a ukázkové příklady lze nalézt v Příloze C.

4.1 Základní principy metody SBRA

Metoda SBRA řeší úlohu určení pravděpodobnost poruchy jako určení hodnoty integrálu /3.3.3/. Tato hodnota je určena na základě znalosti spolehlivostní funkce /3.3.1/ analýzou empirického rozdělení výstupních veličin SBRA modelu, tzv. základních veličin. Vstupní veličiny, mezi něž patří zatížení, mechanické a geometrické vlastnosti konstrukce atd. jsou pomocí modelu transformovány na výstupní veličiny, vyjadřující složky účinků zatížení a referenční hodnoty, jež jsou zobecněním odolnosti. Vstupní náhodné veličiny jsou považovány za omezené (definované na omezeném intervalu) a aproximovány neparametrickým rozdělením – histogramem. Tento způsob popisu dobře vyjadřuje skutečné vlastnosti používaných veličin. Empirické rozdělení výstupních veličin je získáno přímou simulací Monte Carlo. V rámci jednoho simulačního kroku je pro náhodné vstupní veličiny vygenerován vektor jejich realizací, vyhodnocením modelu jsou vypočteny hodnoty výstupních veličin a tento vektor, tvořící jednu z možných interakcí mezi odolnostmi (referenčními hodnotami) R a účinky zatížení S , je zaznamenán. Po provedení velkého počtu kroků reprezentují zaznamenané vektory mnohorozměrné empirické rozdělení výstupních veličin. Spolehlivostní funkce je definována jako funkce výstupních náhodných veličin a rozděluje R - S prostor na bezpečnou oblast a oblast poruchy. Vyhodnocením spolehlivostní funkce pro každý zaznamenaný vektor výstupních veličin lze zjistit případy, ve kterých interakce

mezi odolností a účinky zatížení patří do oblasti poruchy. Tyto případy představují selhání konstrukce. Četnost případů selhání určuje pravděpodobnost poruchy, jež je základním ukazatelem spolehlivosti konstrukce. Situace pro podmínku spolehlivosti $R \geq S$ je znázorněna na obrázku 4.1.1.

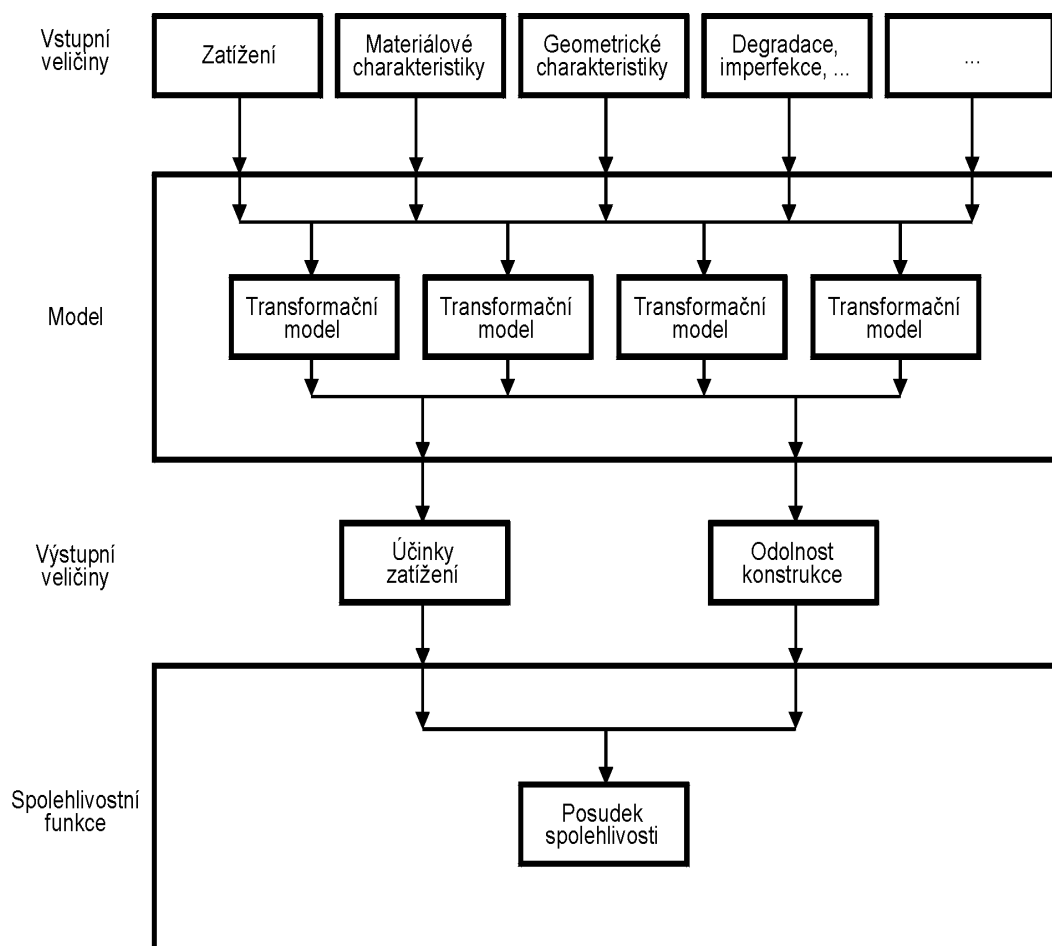


Obr. 4.1.1: Určení spolehlivosti metodou SBRA

Základní principy metody SBRA je možné shrnout do následujících bodů:

- Vstupní veličiny a parametry výpočtového modelu mohou být považovány za náhodné veličiny.
- Rozdělení náhodných veličin jsou považována za omezená.
- Rozdělení náhodných veličin jsou aproximována neparametrickými rozděleními.
- Simulační model umožňuje sledování interakce základních proměnných (účinků a odolnosti).
- K určení rozdělení základních proměnných jsou použity simulační techniky a metoda Monte Carlo.
- Příznivé a nepříznivé případy interakcí základních proměnných jsou vyjádřeny spolehlivostní funkcí.
- Spolehlivost je určena na základě vyhodnocení podmínek spolehlivosti, definovaných spolehlivostní funkcí.

Hlavní součásti metody SBRA jsou znázorněny na obrázku 4.3.2. Vstupní náhodné veličiny X_1, \dots, X_n jsou modelem $Y=M(X)$ transformovány na výstupní veličiny (základní proměnné) Y_1, \dots, Y_m . Simulací metodou Monte Carlo je určeno rozdělení náhodného vektoru Y . Pomocí spolehlivostní funkce $RF=G(Y)$ je z rozdělení veličiny Y určena spolehlivost jako pravděpodobnost poruchy p_j .



Obr. 4.3.2: Metoda SBRA

4.2 Model

Modely používané v metodě SBRA jsou vytvořeny z transformačních modelů, popisujících vlastnosti konstrukce, odezvu konstrukce na zatížení a působení dalších vnitřních a vnějších podmínek a vlivů. Při volbě vhodných modelů je třeba najít kompromis mezi přesností a komplexností modelů a rychlostí a jednoduchostí výpočtu. Model musí dostatečně přesně popisovat realitu a zároveň musí být snadno použitelný. Veličiny vstupující do modelu lze rozdělit do několika skupin.

Zatížení tvoří základní skupinu vnějších vlivů, působících na konstrukci. Lze je vyjádřit pomocí veličin jako síla, tlak, moment, energie, rychlost, zrychlení, deformace, teplota a pod. Působením zatížení na konstrukci je vyvolána reakce (odezva konstrukce), tzv. účinky zatížení S . Ty bývají vyjádřeny jako ohybové momenty, napětí, průhyby atd. Na základě analýzy konstrukce jsou vytvořeny transformační modely, převádějící jednotlivá zatížení, působící v různých místech konstrukce různými směry, na účinky zatížení vyjádřené vnitřními silami, momenty, tlaky, zrychleními, deformacemi a pod. Použité transformační modely musí brát v úvahu vlivy různých druhů geometrických a fyzikálních nepřesností a vyhodnocení odezvy konstrukce na náhodná zatížení může vyžadovat znalost historie časově proměnných zatížení [84].

Mechanické vlastnosti materiálu, geometrické vlastnosti jednotlivých dílů a konstrukce, vlivy koroze, teploty, imperfekcí a pod. tvoří základní skupinu veličin, mající vliv na referenční hodnoty R , k nimž jsou vztahovány účinky zatížení. Referenční hodnoty R jsou v dalším textu označovány jako odolnost (nebo též odpor) konstrukce, tedy schopnost konstrukce odolat účinkům zatížení. Odolnost reprezentuje vlastnosti materiálů, jako jsou deformace, akumulace poškození, koroze, degradace materiálu a podobné jevy, popisující možné stavy selhání a jejich definice. Odolnost může být definována z hlediska jednorázového přetížení, akumulace poškození, stability polohy, atd. Odolnost může být definována jako:

- opuštění pružné oblasti působení
- dosažení tolerovatelných pružně-plastických přetvoření
- vzniku nadměrného poškození, vedoucího k nutnosti opravy nebo nahrazení poškozené konstrukce

Různé alternativy vedou k různým hodnotám odolnosti. Pravděpodobnost poruchy je nutno vztáhnout ke zvolené referenční úrovni.

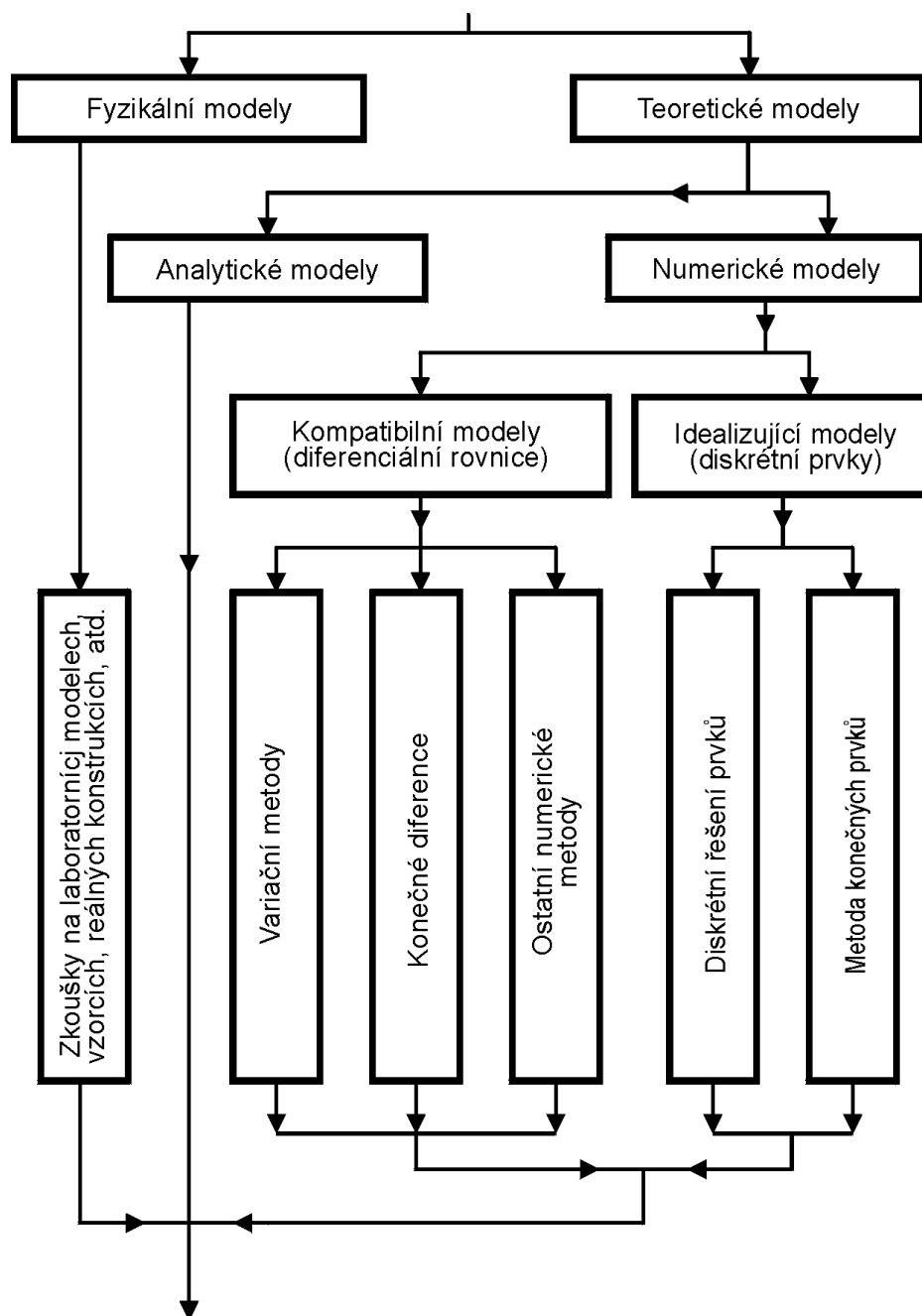
Zvláštní podmínky se vztahují k různým vyjímecím situacím, jako jsou vlivy prostředí, testování, údržba, rekonstrukce, následky požáru nebo výbuchu. Obvykle lze zvláštní podmínky zahrnout mezi účinky zatížení a odolnost.

Vzájemné působení vstupních veličin a jejich vliv na veličiny výstupní, patřící na stranu účinků zatížení nebo odolnosti, popisují transformační modely [32, 42, 12]. Přehled nejdůležitějších transformačních modelů je na obrázku 4.2.1.3.

Fyzikální modely jsou používány pro experimentální určování odezvy v případech, kdy nejsou k dispozici odpovídající teoretické modely, případně lze pomocí experimentů prováděných na fyzikálních modelech ověřovat platnost modelů teoretických. Analytické modely jsou výchozím typem teoretických matematických modelů, použitým pro formulaci problému v uzavřené formě. Přímé řešení komplexnějších problémů pomocí analytických modelů nebývá možné, proto jsou používány numerické modely a jim odpovídající numerické metody.

Modely je možné dále rozdělit na statické, používané pro analýzu statických účinků stálých i časově proměnných zatížení, která vyvolávají v konstrukci zanedbatelné zrychlení a dynamické, používané pro určení dynamických účinků zatížení v případech, kdy vyvolané zrychlení nelze zanedbat. Pokud se předpokládají nízké hodnoty účinků zatížení a chování materiálu je možné pokládat za lineární, je možné použít pružných modelů. Modely pružně-plastické připouštějí i nelineární chování materiálu v plastické oblasti pracovního diagramu. Modely založené na aplikaci teorie 1. řádu vyšetřují odezvu nedeformované konstrukce. Při použití teorie 2. řádu je vyšetřována rovnováha vnějších a vnitřních sil na hranici deformace.

Popsané typy transformačních modelů jsou v konkrétních situacích kombinovány tak, aby co nejlépe vystihovaly skutečné vlastnosti konstrukce a zároveň byly dostatečně jednoduché a prakticky použitelné.



Obr. 4.2.1.3 Transformační modely

Model v metodě SBRA provádí transformaci vektoru X vstupních náhodných veličin X_1, \dots, X_n na vektor Y výstupních veličin Y_1, \dots, Y_m

$$Y = M(X) \quad /4.2.1/$$

V souladu s koncepcí mezních stavů jsou zkoumány vztahy mezi účinky zatížení na konstrukci a odolností konstrukce. Analýzou interakce těchto veličin je určována spolehlivost konstrukce. Použitý model proto obvykle převádí vstupní veličiny jako jsou zatížení, vlastnosti materiálu, geometrie konstrukce atd. na složky účinků S a odolnosti R . V metodě SBRA je model /4.2.1/ použit pro získání empirického rozdělení veličiny Y simulací Monte Carlo. V každém kroku jsou vygenerovány realizace vstupních náhodných veličin X_i vstupující do modelu jako vektor X . Řešením modelu je získán

vektor výstupních veličin Y , jehož hodnoty jsou zaznamenávány. Opakováním simulací je získáno empirické rozdělení veličiny Y , použité dále pro určení spolehlivosti, vyjádřené pravděpodobností poruchy.

4.3 Vstupní veličiny

Metoda SBRA je stochastickou metodou, neboť vstupní data a parametry modelu mají obecně náhodný charakter a vstupují do simulace jako vstupní náhodné veličiny. Rozdělení některých vstupních veličin jsou získávána na základě teoretických znalostí o těchto veličinách. Pro většinu fyzikálních veličin nejsou typy a parametry rozdělení známy a proto jsou k jejich určení používána data získaná na základě měření, testů a zkoušek. Zpracováním těchto dat je obvykle vytvářen histogram (sloupcový graf četností), reprezentující empirickou pravděpodobnostní funkci nebo funkci hustoty pravděpodobnosti. Odpovídající empirické rozdělení může být nahrazeno vhodným rozdělením teoretickým [77]. Pokud nejsou o některých veličinách k dispozici žádné informace, jsou obvykle pro jejich reprezentaci používána některá obecná rozdělení, jako rovnoměrné, normální, trojúhelníkové a pod.

Rozdělení mnoha náhodných veličin, použitých v metodě SBRA, nelze dobře aproximovat žádným z obvyklých rozdělení, proto je pro jejich aproximaci použito neparametrických rozdělení ve formě histogramu (viz kapitola 2.3.5). Pokud je rozdělení hodnot uvnitř jednotlivých tříd považováno za rovnoměrné, je originální spojité rozdělení aproximováno rozdělením po částech rovnoměrným. Pokud jsou všechny hodnoty uvnitř jednotlivých tříd reprezentovány jedinou hodnotou, je originální rozdělení aproximováno rozdělením diskretním (obrázek 4.3.1).

Použití neparametrických rozdělení je výhodné také v případech, kdy se nejedná o aproximaci, ale rozdělení vstupních veličin jsou určována na základě vyhodnocování vstupních dat s využitím expertních znalostí.

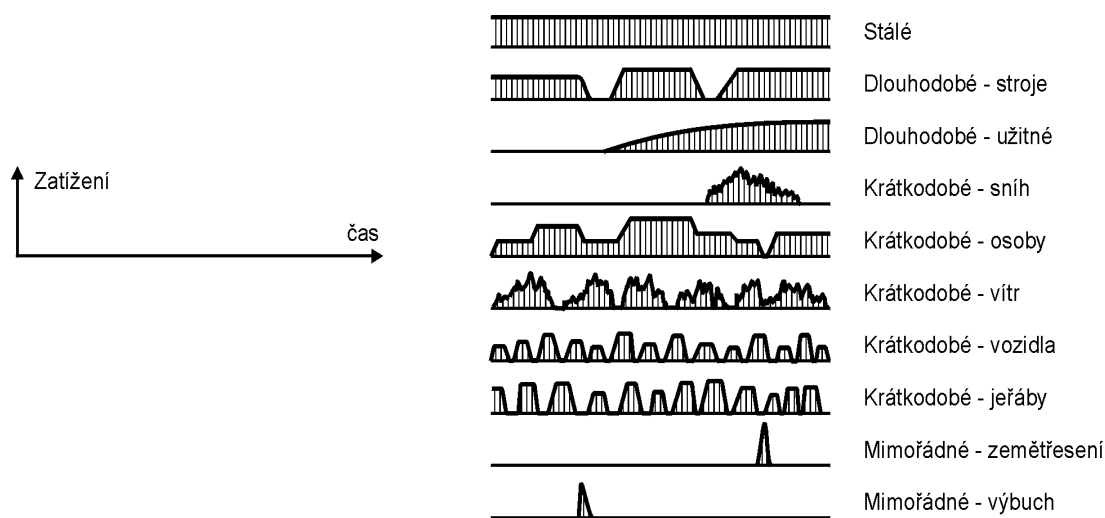


Obr. 4.3.1: Aproximace diskretním a po částech rovnoměrným rozdělením

Jelikož u náhodných veličin pro praktické použití lze předpokládat, že nabývají pouze hodnot z omezeného intervalu $[a, b]$, lze k jejich popisu použít omezená rozdělení. To je výhodné při implementaci generátoru náhodných čísel.

Hlavní skupinu vstupních náhodných veličin tvoří zatížení, což jsou vlivy působící na konstrukci a vyvolávající napětí, deformaci, změnu stavu, polohy a pod. V mnoha

normách jsou z důvodu zjednodušení zatížení považována za nezávislá na čase, to znamená, že intenzita zatížení je konstantní po celou dobu života konstrukce. Ve skutečnosti jsou všechna zatížení proměnlivá v čase a tato proměnlivost má náhodný charakter [54], viz obrázek 4.3.2.

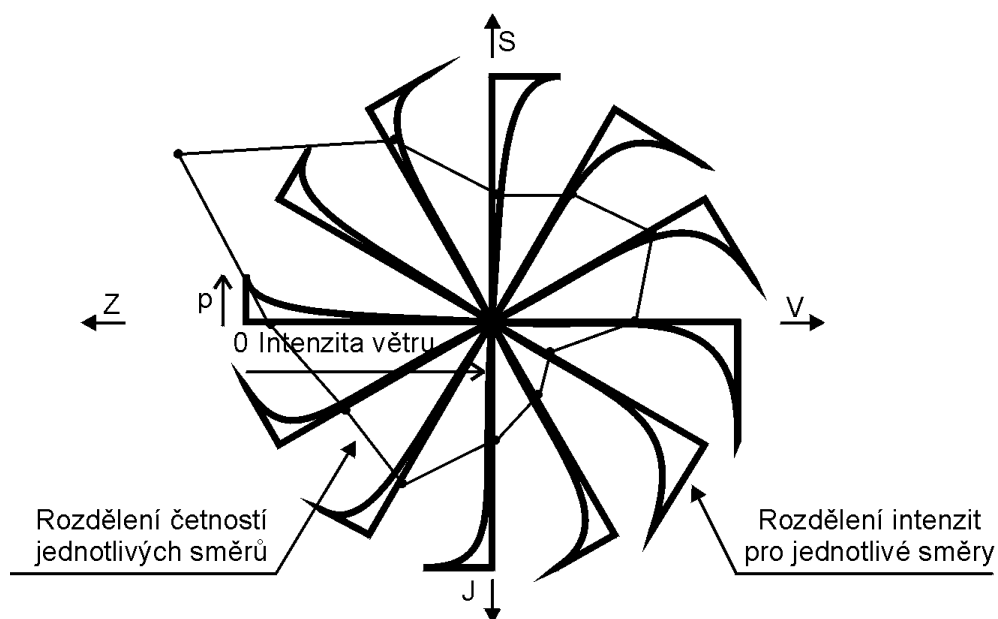


Obr. 4.3.2 Časový průběh zatížení

K základním vlastnostem charakterizujícím proměnlivost zatížení patří intenzita, trvání, četnost výskytu, směr a místo působení atd. Pro úplný popis zatížení by bylo třeba mít k dispozici informace o průběhu všech jejích vlastností po celou dobu života posuzované konstrukce. Tyto informace obvykle nebývají k dispozici, proto je používán pravděpodobnostní popis potřebných vlastností zatížení.

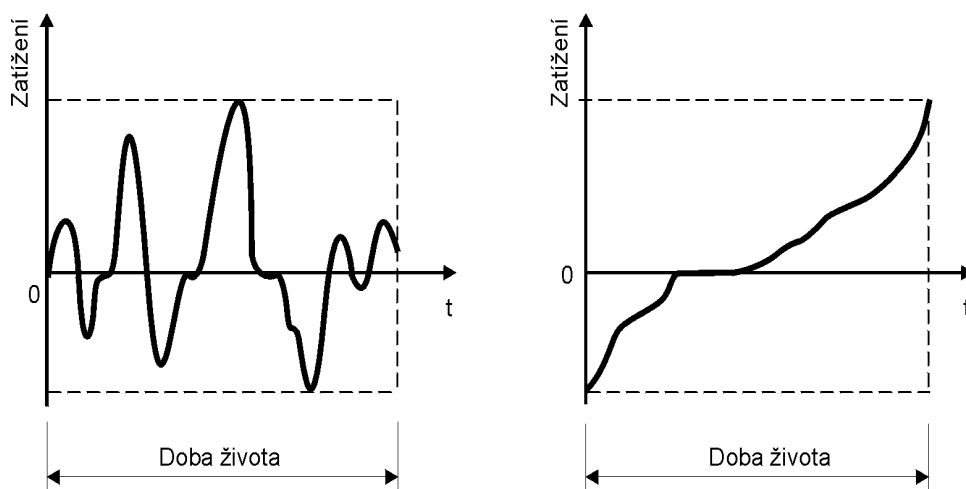
Při použití jednorozměrných rozdělení jsou zatížení označována jako jednokomponentní. V těchto případech je jedna z vlastností zatížení (např. intenzita) považována za náhodnou veličinu a ostatní vlastnosti za konstanty. Jednokomponentní účinky zatížení jsou vyjádřeny jednou skalární veličinou ve zkoumaném místě konstrukce. Pokud jsou k pravděpodobnostnímu popisu zatížení použita vícerozměrná rozdělení, jsou zatížení označována jako vícekomponentní. Vícekomponentní účinky jsou ve zkoumaném místě konstrukce vyjádřeny více složkami – vektorem. Příkladem vícekomponentního zatížení je zatížení větrem, u něhož uvažujeme proměnnou intenzitu a směr působení. Zatížení větrem je vyjádřeno rozdělením intenzit větru pro 12 vybraných směrů a rozdělením četností výskytů větru daného směru, viz obrázek 4.3.3. Údaje jsou odvozené z výsledků dlouhodobých měření Českého hydrometeorologického ústavu [63].

Z hlediska vzájemné závislosti lze zatížení rozdělit na nezávislá (nezávisející jedno na druhém) a závislá (související spolu nějakým druhem závislosti). Mezi závislými zatíženími tvoří významnou skupinu zatížení existenčně závislá, která se nemohou vyskytnout samostatně a vzájemně se vylučující, která se nemohou vyskytnout současně. Ve většině případů jsou zatížení považována za nezávislá, a to jak z důvodu zjednodušení, tak i pro obtížný popis závislosti.



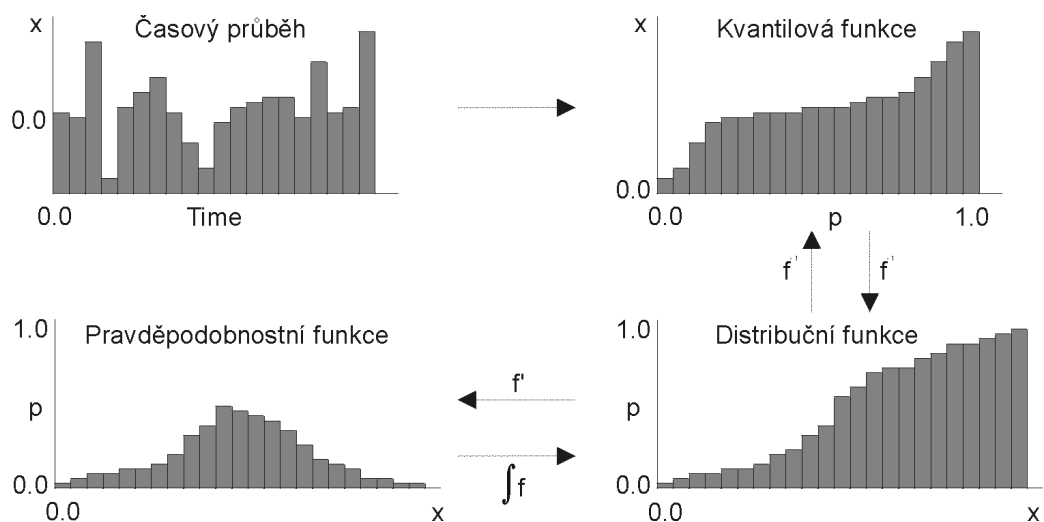
Obr. 4.3.3 Rozdělení intenzit větru

Jelikož je vyjádření náhodného charakteru různých typů zatížení v různých metodách velmi nejednotné, byly v metodě SBRA zavedeny pro reprezentaci zatížení tzv. křivky trvání zatížení (LDC – Load Duration Curves). Ty vzniknou z časového průběhu veličiny setříděním hodnot podle velikosti, viz obrázek 4.3.4.



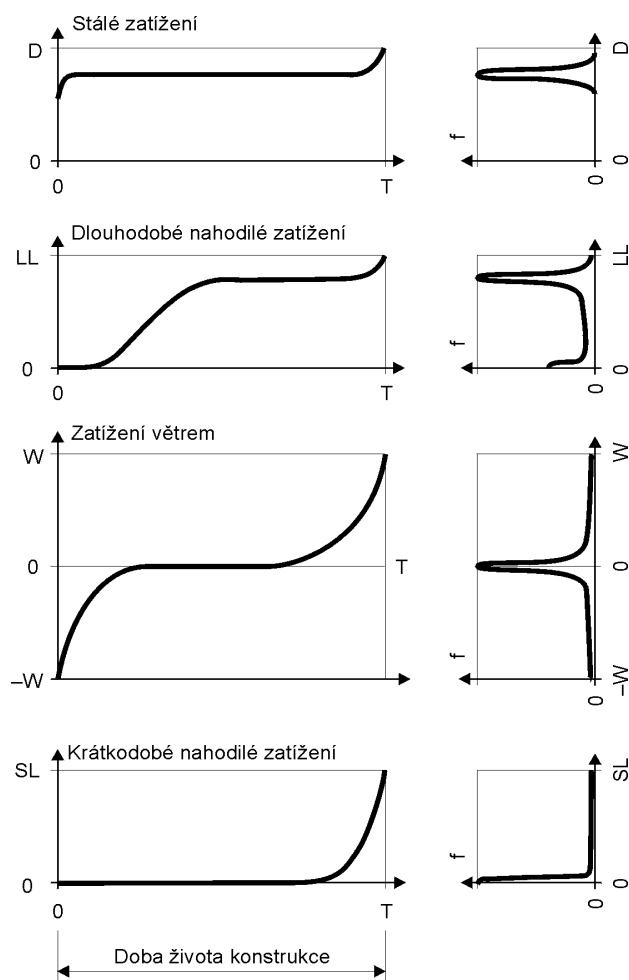
Obr. 4.3.4 Historie a křivka trvání zatížení

Z grafického znázornění křivky trvání lze snadno určit podíl doby trvání jednotlivých úrovní zobrazené veličiny. Křivka trvání je zároveň kvantilovou funkcí, případně empirickou kvantilovou funkcí příslušné náhodné veličiny, viz konstrukce Queteletovy funkce v kapitole 2.3.2.3, a lze ji tudíž použít k popisu rozdělení příslušné veličiny. Vztahy mezi různými formami popisu jsou schematicky znázorněny na obrázku 4.3.5. Pro větší názornost je použito histogramů.



Obr. 4.3.5: Reprezentace náhodných veličin

Příklady křivek trvání a odpovídajících funkcí hustoty pravděpodobnosti jsou na obrázku 4.3.6.



Obr. 4.3.6 Křivky trvání a hustoty pravděpodobnosti

V některých případech je vhodné uvažovat kladné i záporné hodnoty zatížení, vyjadřující působení zatížení v protilehlých směrech, např. tlak – tah. Na obrázku 4.3.6 je takto definováno zatížení větrem.

Obdobným způsobem jako zatížení jsou v metodě SBRA použita neparametrická rozdělení pro aproximaci rozdělení ostatních vstupních náhodných veličin, jako jsou mechanické vlastnosti materiálů, geometrické vlastnosti konstrukce, vlivy vnějšího prostředí atd., která jsou při použití jiných metod obvykle aproximována některým z teoretických rozdělení [8].

4.4 Spolehlivostní funkce

Spolehlivost konstrukce je určována na základě vztahu mezi složkami účinků zatížení a odolnosti konstrukce, zvanými základní proměnné Y_i , které jsou při návrhu konstrukcí návrhovými parametry. Vztah mezi základními proměnnými se nazývá spolehlivostní funkce (reliability function RF), funkce bezpečnosti (safety function SF) nebo též funkce poruchy.

$$RF = G(Y_1, Y_2, \dots, Y_m) \quad /4.4.1/$$

Tato funkce dělí prostor návrhových parametrů na oblast poruchy ($RF < 0$) a oblast spolehlivosti ($RF \geq 0$), viz kapitola 3.3. Pro spojité náhodné veličiny Y_i lze pro spolehlivostní funkci /4.4.1/ určit pravděpodobnost poruchy jako integrál sdružené funkce hustoty pravděpodobnosti $f_Y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ proměnných Y_i přes celou oblast poruchy, tedy oblast pro kterou platí $G(Y_1, \dots, Y_m) < 0$

$$p_f = \int \dots \int_{g = \{ (Y_1, \dots, Y_m) | G(Y_1, \dots, Y_m) < 0 \}} f_Y(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 dy_2 \dots dy_m \quad /4.4.2/$$

Pro výpočet hodnoty integrálu /4.4.2/ je třeba znát rozdělení veličiny Y , popsané sdruženou funkcí hustoty pravděpodobnosti f_Y . V metodě SBRA obvykle odpovídají veličinám Y_i složky odolnosti R a účinků zatížení S . Vzájemné interakce mezi odolností R a účinky zatížení S popsané modelem M jsou získány pomocí simulace. V obecném případě jsou účinky zatížení S i odolnost R mnohorozměrné veličiny (vektory). Vektor tvoří tedy i výstupní veličiny Y modelu M . Spolehlivostní funkce RF je pak definována jako funkce G vektoru výstupních náhodných veličin simulačního modelu

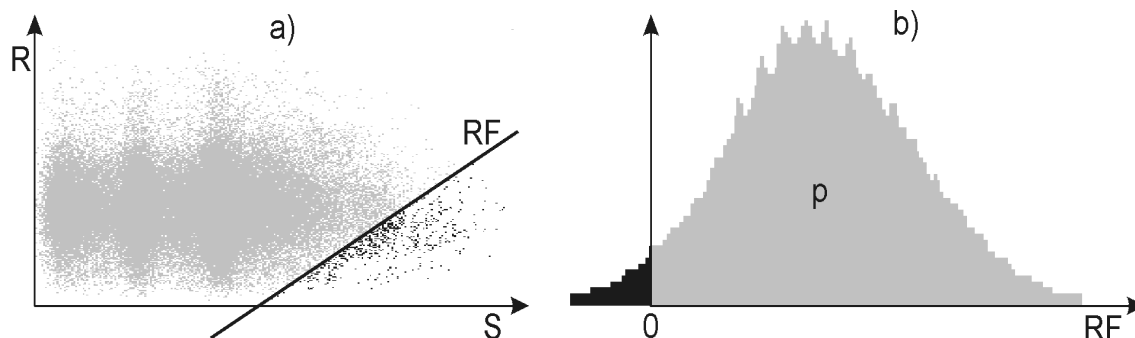
$$RF = G(Y) \quad /4.4.3/$$

Vektory hodnot výstupních veličin jsou považovány za body v n rozměrném prostoru, rozděleném podmínkou G na bezpečnou oblast $G \geq 0$ a oblast poruchy

$G < 0$. Hledaná pravděpodobnost poruchy p_f je odhadnuta jako $p_f = \frac{n_f}{n}$, kde n_f je počet bodů v oblasti poruchy a n je celkový počet simulačních kroků, tedy celkový počet vygenerovaných bodů v R - S prostoru, viz obrázek 4.4.1. a).

Druhou možností při určení pravděpodobnosti poruchy je považovat veličinu RF ze vztahu /4.4.3/ za náhodnou veličinu. V tomto případě je vyhodnocován model ve tvaru $RF = G(M(X))$ a simulací je vytvářeno empirické rozdělení veličiny RF . Odhadovaná

hodnota \hat{p}_f hledané pravděpodobnosti poruchy $p_f = P[RF < 0]$ je určena z empirické distribuční funkce nebo funkce hustoty pravděpodobnosti veličiny RF , viz obrázek 4.4.1. b), nebo jako poměr $\hat{p}_f = \frac{n_f}{n}$, kde n_f je počet simulací při nichž bylo $RF < 0$ a n je celkový počet simulačních kroků.



Obr. 4.4.1: Spolehlivostní funkce

Postup výpočtu pravděpodobnosti poruchy, využívající vygenerovaných bodů v R - S prostoru (případ a), je použit v programu Anthill pro MS-DOS, postup využívající rozdělení veličiny RF (případ b) je použit v programu M-Star. V případě postupu a) je třeba ukládat hodnoty všech vygenerovaných vektorů Y . Takto jsou uloženy veškeré informace získané provedenou simulací. Nevýhodou uvedeného postupu může být velká paměťová náročnost při ukládání výsledků velkého počtu simulačních kroků. V případě postupu b) postačuje vytvářet pouze histogram veličiny RF , případně jen zaznamenávat počet simulací n_f , při nichž bylo $RF < 0$. Tento postup neumožňuje zjistit rozdělení jednotlivých složek vektoru Y ani vzájemné interakce veličin R a S . Program Anthill pro Windows umožňuje oba postupy kombinovat.

Mezní stavy jsou při posudku spolehlivosti děleny na mezní stavy bezpečnosti a mezní stavy použitelnosti. Návrh konstrukce z hlediska bezpečnosti má zajistit její užívání po celou dobu předpokládané životnosti aniž by došlo k poruše, která by mohla mít za následek poškození zdraví osob nebo majetku. Návrh z hlediska použitelnosti má zabezpečit splnění podmínek, daných obvykle uživatelem, které mají zajistit použitelnost konstrukce pro daný účel. Cílem může být např. omezení vibrací nebo deformací konstrukce na stanovenou míru. Splnění podmínek bezpečnosti a použitelnosti nelze ve všech případech zaručit, proto je pro konkrétní druh a účel konstrukcí stanovena přijatelná pravděpodobnost poruchy. Tato pravděpodobnost poruchy je jako návrhová úroveň spolehlivosti předepsána normami. Tabulka 4.4.1 uvádí návrhové úrovně spolehlivosti P_d podle normy ČSN 73 1401 – 1995, Příloha A.

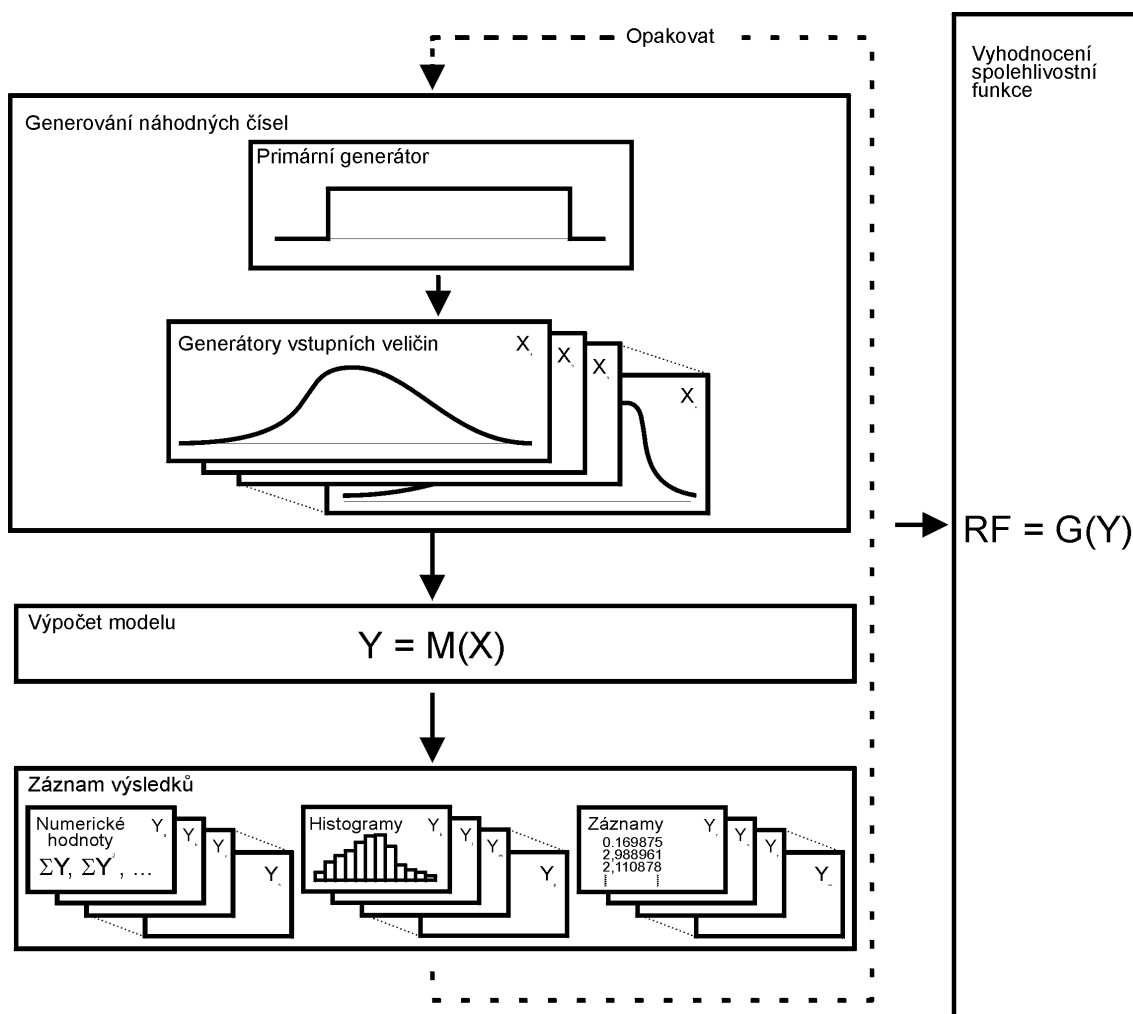
Úroveň spolehlivosti	Mezní stavy bezpečnosti	Mezní stavy použitelnosti
Snížená	0,0005	0,16
Obvyklá	0,00007	0,07
Zvýšená	0,000008	0,023

Tab.4.4.1: Návrhové úrovně spolehlivosti P_d dle ČSN 73 1401 – 1995, Příloha A

5 Anthill – program pro určování spolehlivosti konstrukcí metodou SBRA

5.1 Základní struktura programu Anthill

Porovnáním různých aplikací metody Monte Carlo lze zjistit, že mívají podobnou základní strukturu a podobné hlavní komponenty. Tento poznatek umožňuje tvorbu univerzálních programů pro řešení široké třídy úloh metodou Monte Carlo. Program Anthill pro Windows spojuje a dále rozšiřuje schopnosti SBRA programů pro MS-DOS. Základní struktura výpočetní části programu Anthill je na obrázku 5.1.1.

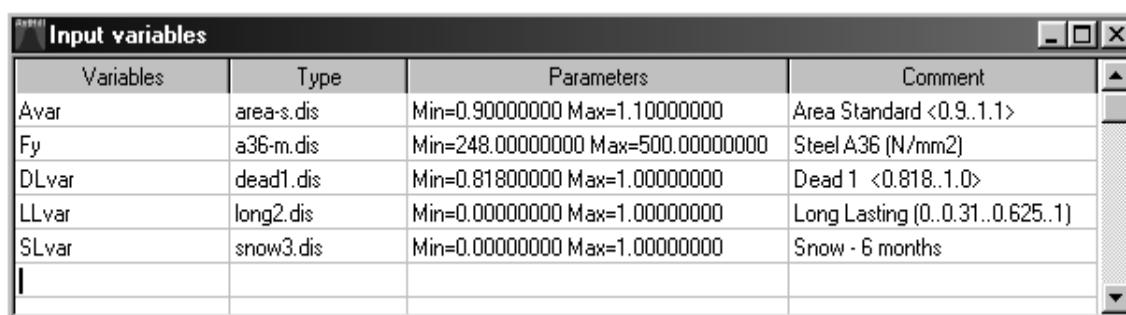


Obr. 5.1.1: Základní struktura programu Anthill

Základem výpočtů je model, popisující řešenou úlohu. Do modelu vstupují náhodné proměnné a parametry. V každém kroku jsou vygenerovány realizace těchto vstupních proměnných a pro vygenerované hodnoty je model vyhodnocen. Po vyhodnocení modelu jsou zaznamenány výsledné hodnoty sledovaných výstupních proměnných. Generování hodnot vstupních proměnných, vyhodnocování modelu a záznam hodnot výstupních proměnných jsou mnohokrát opakovány. Po ukončení zadaného počtu cyklů jsou zpracovány zaznamenané hodnoty, případně vyčíslena spolehlivostní funkce.

5.2 Vstupní náhodné veličiny

Vstupní data a parametry modelu, mající náhodný charakter, vstupují do simulace jako vstupní náhodné veličiny, viz obrázek 5.2.1.



Variables	Type	Parameters	Comment
Avar	area-s.dis	Min=0.90000000 Max=1.10000000	Area Standard <0.9..1.1>
Fy	a36-m.dis	Min=248.00000000 Max=500.00000000	Steel A36 (N/mm2)
DLvar	dead1.dis	Min=0.81800000 Max=1.00000000	Dead 1 <0.818..1.0>
LLvar	long2.dis	Min=0.00000000 Max=1.00000000	Long Lasting (0..0.31..0.625..1)
SLvar	snow3.dis	Min=0.00000000 Max=1.00000000	Snow - 6 months

Obr. 5.2.1: Vstupní proměnné

K provádění simulací je třeba mít k dispozici pro všechny vstupní náhodné veličiny zdroj náhodných čísel s požadovaným rozdělením. Tato náhodná čísla jsou generována ve dvou krocích. Nejprve je pomocí primárního generátoru generována posloupnost náhodných, vzájemně nezávislých čísel s rovnoměrným rozdělením. Transformací je z této posloupnosti vytvořena posloupnost čísel s požadovaným rozdělením, viz kapitola 2.4. Jelikož v metodě SBRA není použita žádná z technik pro snížení rozptylu (viz kapitola 2.5.3), jsou takto získaná náhodná čísla použita jako vstupní hodnoty pro další výpočty.

Rozdělení všech vstupních náhodných proměnných jsou považována za omezená. V obvyklých případech, kdy rozdělení vstupních veličin nelze považovat za žádná z běžných teoretických rozdělení, jsou jejich rozdělení aproximována rozdělením diskrétním nebo po částech rovnoměrným. Obecné diskrétní rozdělení lze použít pro aproximaci diskrétních rozdělení nebo rozdělení spojitých, u nichž spojitý charakter není podstatný, ale je důležitá rychlost generování. Po částech rovnoměrným rozdělením lze dobře aproximovat rozdělení spojitá. Obě rozdělení jsou generována metodou inverzní transformace s tabelovanými hodnotami kvantilové funkce. Z důvodu efektivní implementace je použito ekvidistantního dělení definičních intervalů generovaných veličin.

Pomocí zvláštních postupů jsou generována některá běžná teoretická rozdělení. To umožňuje snadné zadávání vstupních náhodných veličin pomocí parametrů těchto rozdělení.

Pro posouzení vlivu náhodnosti jednotlivých vstupních veličin lze některým veličinám přiřadit konstantní hodnoty. Některé vstupní veličiny mohou nabývat hodnot rovných číslu prováděného simulačního kroku, které je možné považovat za diskrétní modelový čas. Toho lze využít při sledování časových závislostí.

5.2.1 Primární generátor

Pro generování základní posloupnosti náhodných čísel byl v programech pro operační systém MS-DOS použit generátor z knihoven překladače Borland Pascal, verze 7, programy pro Windows využívají generátor z překladače Borland Delphi, verze 3. V obou případech se jedná o lineární kongruenční generátor, pracující podle vztahu 5.2.1.2, s multiplikativní konstantou $a = 134775813$, aditivní konstantou $c = 1$ a modulem $m = 2^{32}$. Perioda generované posloupnosti má délku $l = 2^{32}$. Procedura je v jazyce symbolických adres (assembleru) implementována takto:

```
NextRand:
MOV  AX,RandSeed.w0
MOV  BX,RandSeed.w2
MOV  CX,AX
MUL  CS:Factor      ;New = Old.w0 * 8405H
SHL  CX,1           ;New.w2 += Old.w0 * 808H
SHL  CX,1
SHL  CX,1
ADD  CH,CL
ADD  DX,CX
ADD  DX,BX          ;New.w2 += Old.w2 * 8405H
SHL  BX,1
SHL  BX,1
ADD  DX,BX
ADD  DH,BL
MOV  CL,5
SHL  BX,CL
ADD  DH,BL
ADD  AX,1           ;New += 1
ADC  DX,0
MOV  RandSeed.w0,AX
MOV  RandSeed.w2,DX
RET
```

Generovaná čísla z intervalu $0 \leq X \leq 2^{32} - 1$ jsou transformována buď na čísla s plovoucí řádovou čárkou z intervalu $[0,1)$ nebo na celá čísla typu `longint` z intervalu $[0,K-1]$, kde K je zadané celé kladné číslo.

V případě velkého počtu generovaných náhodných proměnných a velkého počtu simulačních kroků může být perioda posloupnosti nedostatečná. Pro tyto případy se počítá v budoucích verzích programu Anthill s využitím míchacího generátoru, popsaného v kapitole 5.2.1.4.

5.2.2 Diskrétní rozdělení

Má-li náhodná veličina X obecné diskrétní rozdělení na množině $\{a_1, \dots, a_n\}$, s pravděpodobnostmi p_1, \dots, p_n , pro které platí

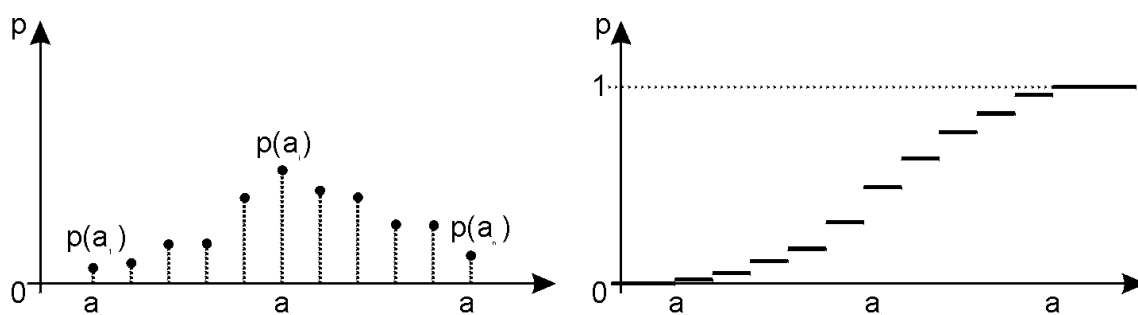
$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad /5.2.2.1/$$

je její pravděpodobnostní funkce $p(x)$

$$p(x) = \begin{cases} p_i & \text{pro } x = a_i \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad /5.2.2.2/$$

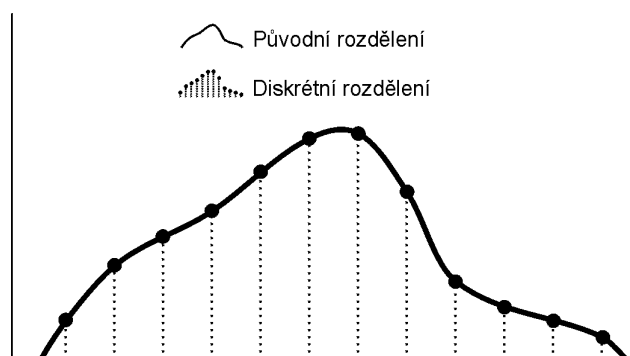
Distribuční funkce má stupňovitý průběh a je určena vztahem

$$F(x) = \sum_{k | a_k \leq x} p_k \quad /5.2.2.3/$$



Obr 5.2.2.1 Vizualizace pravděpodobnostní a distribuční funkce diskrétního rozdělení

Obecné diskrétní rozdělení je spolu s rozdělením po částech rovnoměrným v SBRA programech použito jako jedno ze základních rozdělení pro aproximaci diskrétních i některých spojitých rozdělení. Vztah mezi originálním rozdělením a jeho aproximací diskrétním rozdělením je schematicky znázorněn na obrázku 5.2.2.2.



Obr 5.2.2.2 Aproximace diskrétním rozdělením

Diskrétní rozdělení má schodovitou distribuční funkci, ke které neexistuje funkce inverzní. Pokud však tuto funkci považujeme za relaci, lze vytvořit relaci inverzní. Z ní lze vhodnou úpravou vytvořit kvantilovou funkci, potřebnou pro použití v metodě inverzní transformace (obrázek 5.2.2.3). Z grafu inverzní relace $F^{-1}(x)$ je zřejmé,

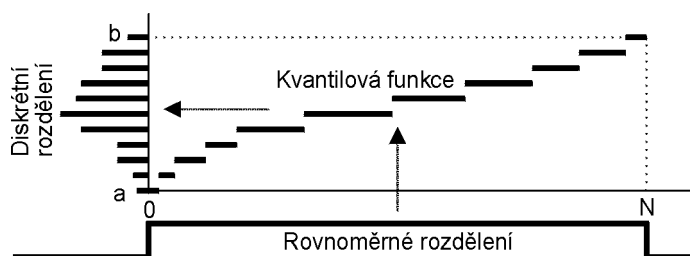
že pro některé hodnoty x určuje relace F^{-1} více hodnot $F^{-1}(x)$. Pro vytvoření kvantilové funkce $Q(x)$ je třeba určit postup jednoznačně vybírající jednu z těchto hodnot. Jednou z možností je definovat funkci Q jako

$$Q(x) = \sup \{t | F(t) \leq x\} \quad /5.2.2.4/$$

nebo

$$Q(x) = \inf \{t | F(t) \geq x\} \quad /5.2.2.5/$$

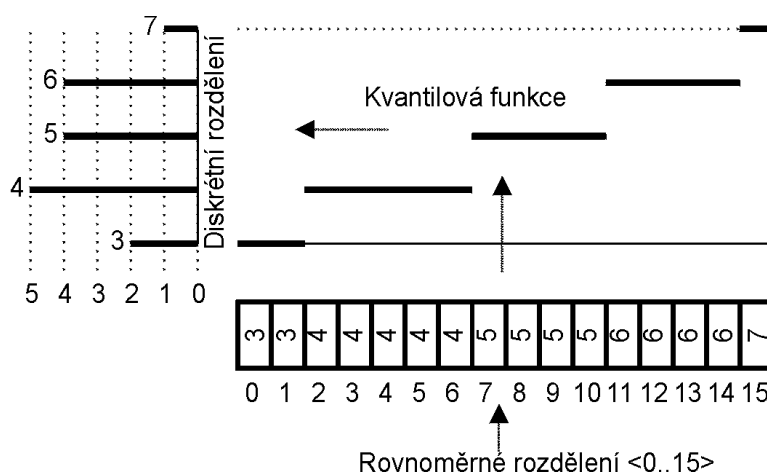
Vztah /5.2.2.4/ je vhodný pro intervaly typu $[a,b)$, vztah /5.2.2.5/ pro intervaly typu $(a,b]$.



Obr. 5.2.2.3: Schema generování diskrétního rozdělení

Pokud je rozdělení definováno na omezeném konečném intervalu $[a,b]$ a četnosti v jednotlivých třídách jsou reprezentovány hodnotami, které je možno považovat za diskrétní (např. celá nebo racionální čísla), lze hodnoty kvantilové funkce tabelovat. Po tabelaci této funkce lze generovat diskrétní rozdělení velmi snadno a efektivně metodou inverzní transformace. Vstupní celočíselná hodnota z rovnoměrného rozdělení tvoří ukazatel do tabulky hodnot kvantilové funkce. Tato tabulka může obsahovat přímo hodnoty generovaného rozdělení.

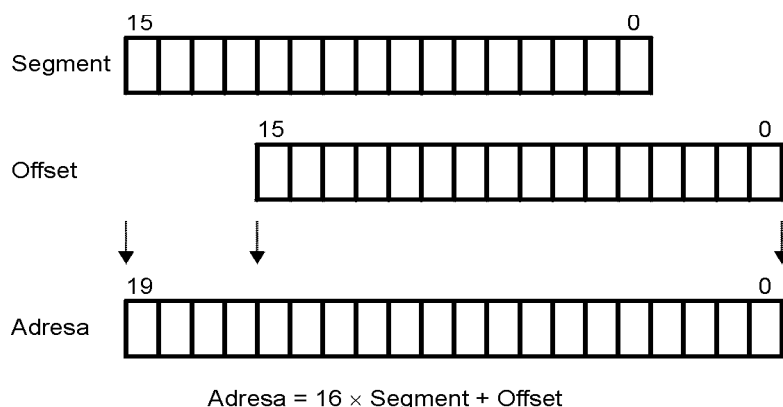
Příklad generování diskrétního rozdělení s hodnotami 3, 4, 5, 6 a 7 a odpovídajícími četnostmi 2, 5, 4, 4 a 1 je znázorněn na obrázku 5.2.2.4. Tabulka obsahuje šestnáct hodnot (součet všech četností) kvantilové funkce.



Obr. 5.2.2.4: Příklad generování diskrétního rozdělení

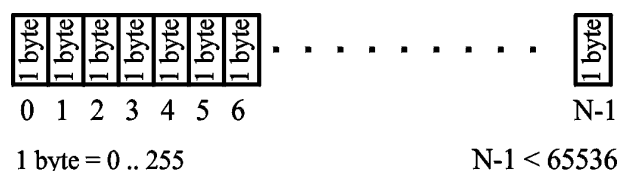
5.2.2.1 Diskrétní rozdělení – 16 bitová verze

Starší SBRA programy, vyvíjené od konce osmdesátých let, pracují pod operačním systémem MS-DOS na osobních počítačích standardu IBM PC. Základní adresovací mechanismus používaný již v procesorech Intel 8086/8088 využívá segmentovanou paměť [61]. Fyzická dvacetibitová adresa je složena z šestnáctibitové adresy segmentu a šestnáctibitového offsetu, viz obrázek 5.2.2.5.



Obr. 5.2.2.5: Segmentové adresování procesoru Intel 8086/8088

Uvedeným způsobem lze adresovat paměťový prostor o velikosti $2^{20} = 1\,048\,576$ bytů (1 MB), složený ze souvislých úseků (segmentů) o velikosti nejvýše $2^{16} = 65\,536$ bytů (64 KB). To ovlivnilo způsob implementace generátoru diskretních rozdělení metodou inverzní transformace. Pokud je velikost tabulky hodnot kvantilové funkce menší než 64 KB, lze celou tabulku umístit do jednoho segmentu paměti. V takovém případě je výpočet adresy velmi rychlý. Adresa segmentu je pro celou tabulku pevná a tabulka je adresována pouze změnou hodnoty offsetu.



Obr 5.2.2.6: Tabelovaná kvantilová funkce pro 16 bitové počítače

Jelikož jsou v programech SBRA použita diskretní rozdělení s ekvidistantním dělením definičního intervalu, tabulka kvantilové funkce neobsahuje přímo hodnoty generovaného rozdělení ale čísla jednotlivých tříd. To umožňuje při omezení počtu tříd na 256 ukládat čísla tříd jako hodnoty typu **byte**. Hodnoty příslušející jednotlivým číslům tříd jsou určeny jednoduchou transformací, využívající pouze jedno násobení a jedno sčítání: $x = a + nc$, kde x je generovaná hodnota, n je číslo třídy a $c = (b - a)$, přičemž a a b jsou hranice definičního intervalu. Jelikož počet hodnot, uložených v tabulce kvantilové funkce, je roven součtu všech četností v jednotlivých třídách, musí být tento součet menší než 65 536. Tím je určena i nejmenší nenulová relativní četnost pro jednotlivé třídy, která může být nejméně $\frac{1}{65536}$.

Několikaleté používání SBRA programů pro operační systém MS-DOS a jejich aplikace při řešení stovek příkladů [54, 50] potvrdilo praktickou použitelnost navržené metody. V některých případech byly na grafech výsledných histogramů pozorovány odchylky od předpokládaných tvarů [30]. Příkladem je histogram na obrázku 5.2.2.7, vzniklý transformací $x = u^2$ diskrétního rovnoměrného rozdělení U s 256 třídami na intervalu [5,6] po provedení 1 000 000 simulací.

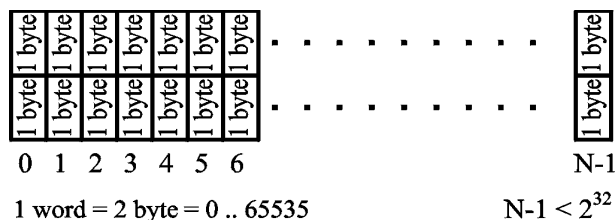


Obr 5.2.2.7: Nepravidelnosti na histogramu funkce u^2 pro diskrétní rovnoměrné rozdělení u s 256 třídami

Analýzou obdobných případů bylo zjištěno, že uvedený jev vzniká při aplikaci nelineárních transformací jako důsledek interference mezi počty tříd vstupního rozdělení a výstupního histogramu. Jev je způsoben nízkým počtem tříd diskrétního rozdělení vstupní náhodné veličiny vzhledem k počtu tříd výstupního histogramu. Výsledné statistiky nejsou v důsledku jejich kumulativního charakteru tímto jevem znatelně ovlivněny [70]. Vývoj osobních počítačů dovolil implementaci dvou metod pro zlepšení aproximace rozdělení vstupních veličin, popsanych v následujících kapitolách.

5.2.2.2 Diskrétní rozdělení – 32 bitová verze

Současné osobní počítače standardu IBM PC umožňují efektivní použití 32-bitových ukazatelů při adresování operační (virtuální) paměti. 32-bitové operace plně podporují od verze Win95 i všechny operační systémy MS-Windows. To umožňuje efektivní implementaci generátoru diskretních rozdělení metodou inverzní transformace s rozšířeným počtem tříd. Zároveň lze zvýšit absolutní četnosti v jednotlivých třídách i celkový součet absolutních četností. Pokud je pro uložení počtu tříd použit dvoubytový datový typ **word**, počet tříd může dosahovat až $2^{16} = 65\,536$. 32-bitové ukazatele dovolují adresovat souvislé oblasti do 2^{32} paměťových míst, v důsledku čehož může součet absolutních četností přesáhnout 10^9 (viz obrázek 5.2.2.8).



Obr 5.2.2.8: Tabelovaná kvantilová funkce pro 32 bitové počítače

Pro uložení tabulky hodnot kvantilové funkce je v tomto případě třeba dvojnásobné množství paměti ve srovnání s 16-bitovou verzí generátoru. Použití 32-bitových ukazatelů do tabulky kvantilové funkce nesnižuje při použití 32-bitových operací rychlost generování ve srovnání s 16-bitovou verzí.

Zvýšení počtu tříd umožňuje lepší aproximaci původního rozdělení. Histogram na obrázku 5.2.2.9 má na rozdíl od histogramu zobrazeného na obrázku 5.2.2.7 předpokládaný tvar. Histogram vznikl transformací $x = u^2$ diskrétního rovnoměrného rozdělení U s 65 536 třídami na intervalu $[5,6]$ po provedení 1 000 000 simulací.



Obr 5.2.2.9: Histogram funkce u^2 pro diskrétní rovnoměrné rozdělení u s 65536 třídami

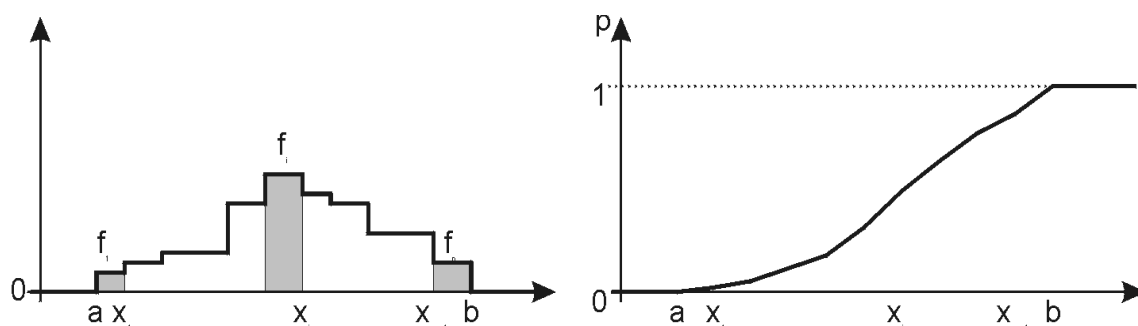
Zvýšení součtu absolutních četností také dovolí reprezentaci velmi malých relativních četností řádu 10^{-9} pro jednotlivé třídy.

5.2.3 Po částech rovnoměrné rozdělení

Má-li náhodná veličina X po částech rovnoměrné rozdělení na intervalu $[a,b]$, pak její funkce hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ je definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ \frac{f_1}{x_1 - a} & \text{pro } a \leq x < x_1 \\ \frac{f_2}{x_2 - x_1} & \text{pro } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ \frac{f_n}{b - x_{n-1}} & \text{pro } x_{n-1} \leq x \leq b \\ 0 & \text{pro } x > b \end{cases} \quad /5.2.3.1/$$

Rozdělení je složeno z n úseků (tříd) s hranicemi x_i a četnostmi v jednotlivých třídách f_i , viz obrázek 5.2.3.1.

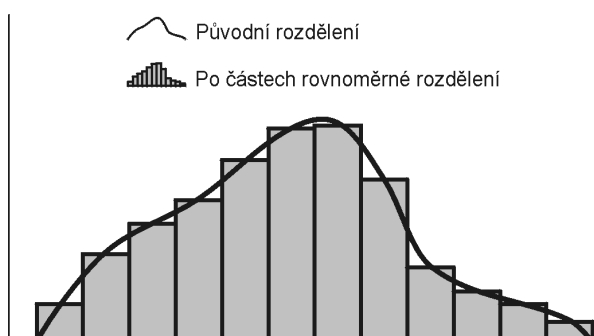


Obr 5.2.3.1: Hustota pravděpodobnosti a distribuční funkce po částech rovnoměrného rozdělení

Distribuční funkce má tvar lomené čáry s body zlomu na hranicích tříd a je definována vztahem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a \\ f_1 \frac{x-a}{x_1-a} & \text{pro } a \leq x < x_1 \\ f_1 + f_2 \frac{x-x_1}{x_2-x_1} & \text{pro } x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{k-2} f_i + f_{k-1} \frac{x-x_{k-2}}{x_{k-1}-x_{k-2}} & \text{pro } x_{k-2} \leq x < x_{k-1} \\ \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n \frac{x-x_{n-1}}{b-x_{n-1}} & \text{pro } x_{n-1} \leq x \leq b \\ 1 & \text{pro } x > b \end{cases} \quad /5.2.3.2/$$

Po částech rovnoměrné rozdělení je v SBRA programech použito jako základní rozdělení pro aproximaci spojitých rozdělení [70]. Vztah mezi originálním rozdělením a jeho aproximací rozdělením po částech rovnoměrným je znázorněn na obrázku 5.2.3.2



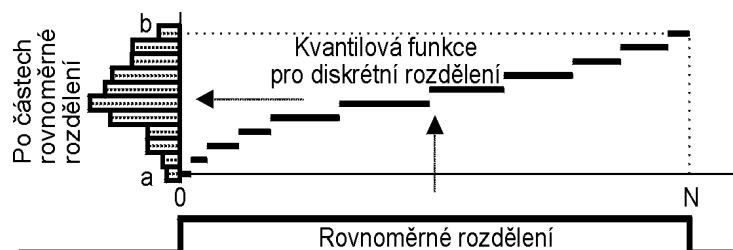
Obr 5.2.3.2: Aproximace po částech rovnoměrným rozdělením

Toto rozdělení je spojité, což může odstranit problémy s malým počtem generovaných diskrétních hodnot, vznikající v některých situacích při použití diskrétního rozdělení, jak je popsáno v kapitole 5.2.2.1. Histogram na obrázku 5.2.3.3 má na rozdíl od histogramu zobrazeného na obrázku 5.2.2.7 předpokládaný tvar. Histogram vznikl transformací $x = u^2$ spojitého rovnoměrného rozdělení U na intervalu $[5,6]$ po provedení 1 000 000 simulací. Rozdělení bylo generováno jako po částech rovnoměrné rozdělení s jednou třídou.



Obr 5.2.3.3: Histogram funkce u^2 pro po částech rovnoměrné rozdělení u

Po částech rovnoměrné rozdělení lze generovat modifikovanou metodou použitou pro generování diskretního rozdělení, popsanou výše. Generování probíhá ve dvou krocích. Nejprve je výše uvedeným postupem vygenerována hodnota z diskretního rozdělení vyjadřujícího relativní četnosti hodnot v jednotlivých třídách po částech rovnoměrného rozdělení. Vygenerovaná hodnota určuje číslo použité třídy. Pro tuto třídu je následně vygenerována hodnota ze spojitěho rovnoměrného rozdělení s rozsahem odpovídajícím hranicím třídy. Takto získané hodnoty jsou realizacemi náhodné veličiny s daným po částech rovnoměrným rozdělením (viz obrázek. 5.2.3.4).



Obr. 5.2.3.4: Schema generování po částech rovnoměrného rozdělení

Je-li pro generování diskretního i rovnoměrného rozdělení použit týž primární generátor, je třeba důkladně otestovat jeho seriální korelaci, neboť případná závislost sousedních členů generované posloupnosti může negativně ovlivnit vlastnosti generovaného rozdělení.

Pro uložení tabulky hodnot kvantilové funkce pro generování po částech rovnoměrného rozdělení je třeba stejné množství paměti jako v případě generátoru diskretního rozdělení. Rychlost generování je přibližně poloviční z důvodu nutnosti generovat v každém kroku dvě náhodná čísla, jedno z diskretního rozdělení a druhé z rozdělení rovnoměrného.

5.2.4 Teoretická rozdělení

Ačkoli je použitá metoda aproximace rozdělení rozdělením diskretním nebo po částech rovnoměrným univerzálně použitelná, je třeba pro každé generované rozdělení nejprve vytvořit soubor dat popisující zvolenou aproximační funkci. Proto je v programu Anthill pro Windows pro generování vybraných rozdělení, popsaných parametry, použito speciálních postupů.

Rovnoměrné rozdělení $U(a,b)$ na otevřeném intervalu (a,b) je generováno pomocí transformace /2.4.2.1/ z primárního rozdělení na intervalu $[0,1)$. Z generované posloupnosti jsou následně vyloučeny hodnoty $x = a$.

Omezené normální rozdělení je generováno Box-Müllerovou metodou, popsanou v kapitole 2.4.2. Vygenerované rozdělení z intervalu $(-\infty, \infty)$ je omezeno na zvolený interval (a,b) vyloučením hodnot x , pro které platí $x \leq a$ nebo $x \geq b$.

Omezené lognormální rozdělení je generováno transformací normálního rozdělení získaného Box-Müllerovou metodou. Vygenerované rozdělení z intervalu $(0, \infty)$ je omezeno na zvolený interval (a, b) vyloučením hodnot x , pro které platí $x \leq a$ nebo $x \geq b$.

5.2.5 Generování závislých veličin

Generované posloupnosti realizací vstupních veličin jsou vzájemně nezávislé. Program Anthill neumožňuje přímé generování závislých veličin. Důvodem je především obtížnost nalezení způsobu dostatečně univerzálního popisu závislosti náhodných veličin. V případě potřeby generovat závislé veličiny lze závislost vyjádřit v rámci použitého modelu. Například v případě normálního rozdělení lze získat páry (x'_i, y'_i) realizací korelovaných veličin s korelačním koeficientem ρ z párů nezávislých veličin (x_i, y_i) pomocí transformace [73]

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \\ y'_i &= \rho x_i + \sqrt{1 - \rho^2} y_i \end{aligned} \quad /5.2.5.1/$$

Existenční závislost vodorovných sil, vznikajících při pohybu jeřábu, které mohou mít nenulovou hodnotu pouze tehdy, když mají svislé síly hodnotu kladnou [54] lze vyjádřit pomocí funkce POS, mající hodnotu 1 pokud je argument kladný. V opačném případě je hodnota funkce POS nulová. Vodorovné síly CH lze tedy v rámci modelu vyjádřit

$$CH = CH_{ind} * POS(CV) \quad /5.2.5.2/$$

kde CH_{ind} je veličina popisující vodorovné síly, nezávislá na svislých silách CV .

5.3 Model

Simulační model má formu $Y = M(X)$, kde X je vektor vstupních proměnných, Y je vektor výstupních proměnných a M je transformační funkce, viz kapitola 4.2. Funkce M je zadána v explicitním tvaru, což dovoluje její přímé vyhodnocení. Pro zápis funkce M je použita běžná forma algebraického zápisu, viz obrázek 5.3.1.



Obr. 5.3.1: Model

Před zahájením výpočtu je nejprve provedena syntaktická analýza rovnic, popisujících model, spojená s kontrolou formální správnosti a úplnosti vstupních dat. Vstupní rovnice v infixovém zápisu jsou převedeny na zápis postfixový, jehož

vyhodnocování je následně prováděno zásobníkovým automatem se dvěma oddělenými zásobníky, jedním pro operandy (data) a druhým pro operátory.

Dále jsou pro všechny vstupní náhodné proměnné vytvořeny příslušné generátory. Pro generování diskrétních a po částech rovnoměrných rozdělení jsou načteny tabulky hodnot kvantilové funkce, pro ostatní rozdělení jsou vytvořeny odkazy pro volání odpovídajících funkcí, viz kapitola 5.2.

Pro všechny sledované výstupní proměnné jsou připraveny datové struktury pro ukládání výsledků. Jako výsledky mohou být ukládány zvolené numerické hodnoty, histogramy nebo záznamy o celé historii generovaných hodnot, viz kapitola 5.5.

Pokud jsou definovány všechny vstupní a výstupní proměnné a zadaný model je formálně správný, je spuštěna vlastní simulace. Při ní je v každém simulačním kroku vygenerován jeden náhodný vektor vstupních hodnot, pro tyto hodnoty je vyhodnocen model a získán výsledný vektor výstupních hodnot. Generování vstupních hodnot a výpočet hodnot výstupních je opakováno a získané výsledky jsou zaznamenávány. Počet potřebných simulačních kroků závisí na požadované přesnosti výsledků.

5.4 Spolehlivostní funkce

Spolehlivostní funkce má formu $RF = G(Y)$, kde Y je vektor výstupních proměnných modelu a G je vlastní spolehlivostní funkce, viz kapitola 4.4. Pro zápis funkce G je použita běžná forma algebraického zápisu.

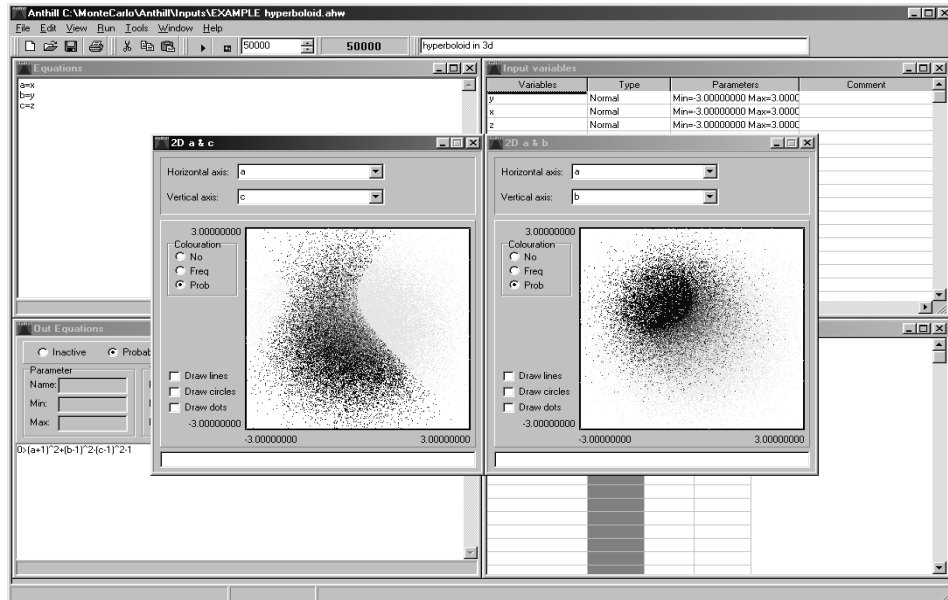
Při zadání spolehlivostní funkce ve tvaru $RF \# G(Y)$, kde $\#$ je symbol relace ($<$, $>$ a pod.), lze určit pravděpodobnost platnosti uvedené relace, viz obrázek 5.4.1. Spolehlivostní funkci lze zadat i ve tvaru $RF \# G(Y, q)$, kde q je parametr, jehož hodnota se hledá iteračním postupem tak aby relace $RF \# G(Y, q)$ byla splněna pro zadanou pravděpodobnost.

Spolehlivostní funkce je vyhodnocována po skončení zadaného počtu simulačních kroků, proto je třeba v průběhu simulací zaznamenávat vypočtené hodnoty potřebných výstupních proměnných Y , viz kapitola 5.5.3.

The image shows a software window titled "Out Equations". At the top, there are three radio buttons: "Inactive", "Probability" (which is selected), and "Parameter". To the right of these is a text box containing the value "0.00093000" and an "Evaluate" button. Below this, the window is divided into three main sections. The first section, labeled "Parameter", contains three input fields: "Name:", "Min:", and "Max:". The second section, labeled "Target", contains three input fields: "Probability:", "Iterations:", and "Difference:". The third section, labeled "Current", contains three input fields: "Probability:", "Iteration:", and "Difference:". At the bottom of the window is a large text area that currently contains the text "0>R-S".

Obr. 5.4.1: Spolehlivostní funkce

Při zobrazení dvojrozměrného obrazu průmětu zaznamenaných n -tic hodnot výstupních proměnných lze zobrazované body obarvit v závislosti na platnosti vztahu $RF \# G(Y)$, případně $RF \# G(Y, q)$. To umožňuje znázornit hraniční oblast danou spolehlivostní funkcí. Následující obrázek 5.4.2 ukazuje rozdělení trojrozměrného prostoru rotačním hyperboloidem, popsáným spolehlivostní funkcí ve tvaru $0 > (a+1)^2 + (b-1)^2 - (c-1)^2 - 1$.



Obr. 5.4.2: Spolehlivostní funkce definující rotační hyperboloid

5.5 Výstupní proměnné

Výstupní proměnné lze v závislosti na požadovaném výstupu ukládat v několika formách, lišících se paměťovými nároky. Způsob implementace, ukládání, reprezentace a interpretace výstupních proměnných závisí na charakteru vyhodnocovaných dat a typu řešeného problému.

Evaluated variables			
Variables	Activity	Interpolate	Comment
R	Log	Yes	
S	Log	Yes	
SF	Histogram	Yes	

Obr. 5.5.1: Výstupní proměnné

5.5.1 Numerické hodnoty

Pokud jako výstup simulací postačují základní statistiky sledovaných výstupních proměnných, postačuje ukládat pouze několik sumárních číselných hodnot. V programu Anthill jsou kromě počtu provedených kroků n ukládány pro každou zvolenou výstupní proměnnou následující veličiny:

- Nejmenší a největší dosažená hodnota Min_i a Max_i

- Součet hodnot $Sum = \sum_{i=1}^n x_i$

- Součet druhých mocnin hodnot $Sum2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

- Součet třetích mocnin hodnot $Sum3 = \sum_{i=1}^n x_i^3$

- Součet čtvrtých mocnin hodnot $Sum4 = \sum_{i=1}^n x_i^4$

Na základě uložených hodnot jsou vypočítány základní statistiky (viz Příloha A) sledovaných proměnných:

Minimum (**Minimum**) a Maximum (**Maximum**) jsou přímo hodnoty Min_i a Max_i pro danou veličinu.

Střední hodnota (**Mean**) je určena podle vztahu /A.11/

$$Mean = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{Sum}{n} \quad /5.5.1.1/$$

Rozptyl (**Variance**) je určen jako druhý centrální výběrový moment podle vztahu /A.8/

$$\begin{aligned} Variance &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i m + m^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2m}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{m^2}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2m^2 + m^2 = \frac{Sum2}{n} - \left(\frac{Sum}{n} \right)^2 \end{aligned} \quad /5.5.1.2/$$

Směrodatná odchylka (**StDev**) je druhou odmocninou z rozptylu

$$StDev = \sqrt{Variance} \quad /5.5.1.3/$$

Variační koeficient (CoVar) je poměr mezi směrodatnou odchylkou a střední hodnotou, viz /A.20/

$$CoVar = \frac{StDev}{Mean} \quad \text{pokud } Mean \neq 0 \quad /5.5.1.4/$$

Pro výpočet šikmosti je nejprve stanovena hodnota třetího centrálního výběrového momentu podle vztahu /A.4/

$$\begin{aligned} m'_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^3 - 3x_i^2 m + 3x_i m^2 - m^3) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 - \frac{3m}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{3m^2}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{m^3}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n} - 3m \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} + 3m^2 - m^3 \\ &= \frac{Sum3}{n} - 3 \frac{Sum}{n} \frac{Sum2}{n} + 2 \left(\frac{Sum}{n} \right)^3 \end{aligned} \quad /5.5.1.5/$$

Šikmost (Skewness) je pak určena podle vztahu

$$Skewness = \frac{m'_3}{StDev^3} \quad /5.5.1.4/$$

Pro výpočet špičatosti je stanovena hodnota čtvrtého centrálního výběrového momentu podle vztahu /A.4/

$$\begin{aligned} m'_4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^4 - 4x_i^3 m + 6x_i^2 m^2 - 4x_i m^3 + m^4) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 - \frac{4m}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 + \frac{6m^2}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{4m^3}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{m^4}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^4}{n} - 4m \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n} + 6m^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 4m^3 + m^4 \\ &= \frac{Sum4}{n} - 4 \frac{Sum}{n} \frac{Sum3}{n} + 6 \left(\frac{Sum}{n} \right)^2 \frac{Sum2}{n} - 3 \left(\frac{Sum}{n} \right)^4 \end{aligned} \quad /5.5.1.5/$$

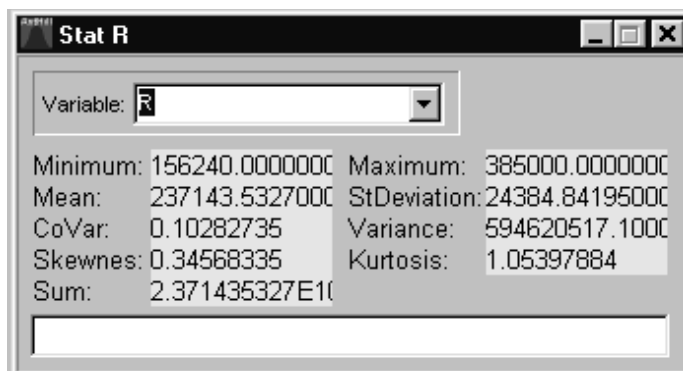
Špičatost (Kurtosis) je pak určena podle vztahu

$$Kurtosis = m \frac{m'_4}{StDev^4} - 3 \quad /5.5.1.6/$$

Součet hodnot (Sum) je přímo hodnota Sum pro danou veličinu.

Uvedené statistiky lze velmi rychle vypočítat, proto lze jejich aktualizované hodnoty zobrazovat vždy po zvoleném počtu provedených kroků, viz obrázek 5.5.1.1. Na základě průběžného sledování jejich změn během výpočtu lze odhadnout, zda již byl proveden dostatečný počet kroků pro požadovanou přesnost výsledků.

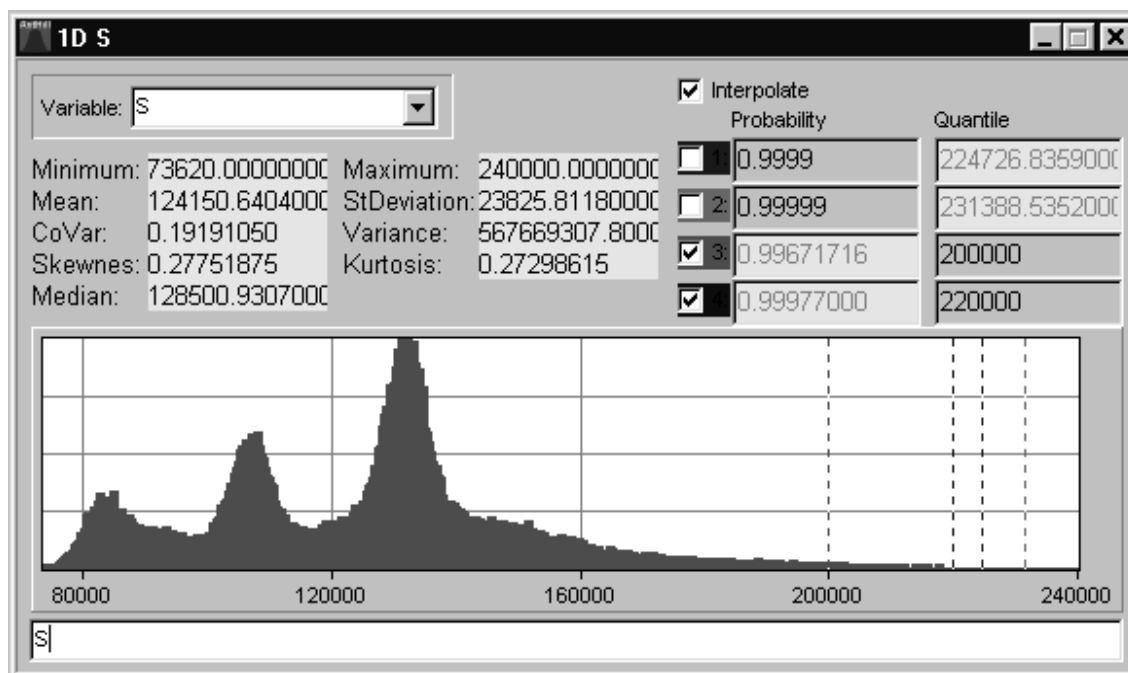
Pro ukládání uvedených numerických hodnot postačuje pro každou sledovanou proměnnou velmi malý počet bytů v paměti.



Obr. 5.5.1.1: Statistiky

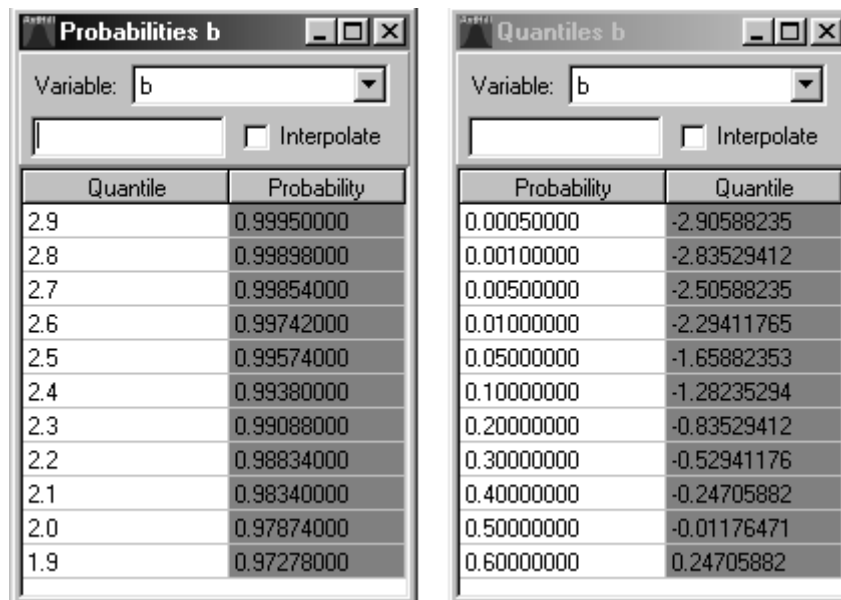
5.5.2 Histogram

Pokud požadujeme jako výstup simulací empirická rozdělení sledovaných výstupních proměnných, je pro jejich zjištění použito histogramů [77]. Hodnoty výstupních proměnných, získané v jednotlivých krocích, jsou zařazeny do tříd a po provedeném třídění jsou zkonstruovány histogramy. Přesnost odhadu funkce hustoty pravděpodobnosti závisí kromě jiného i na zvoleném počtu tříd, jak bylo uvedeno v kapitole 2.3.5.



Obr. 5.5.2.1: Histogram výstupní veličiny

Pro vytvoření histogramu jsou vypočítány základní statistiky. Z důvodu ztráty informací při zatřídění hodnot do tříd histogramu se tyto statistiky mohou lišit od srovnatelných statistik, vypočtených na základě uložených numerických hodnot, popsanych v kapitole 5.5.1 [4]. Pomocí vytvořeného histogramu lze určovat také hodnoty kvantilů a odpovídajících pravděpodobností (viz obrázek 5.5.2.2), což je typická úloha při určování spolehlivosti metodou SBRA.



Obr. 5.5.2.2: Pravděpodobnosti a kvantily

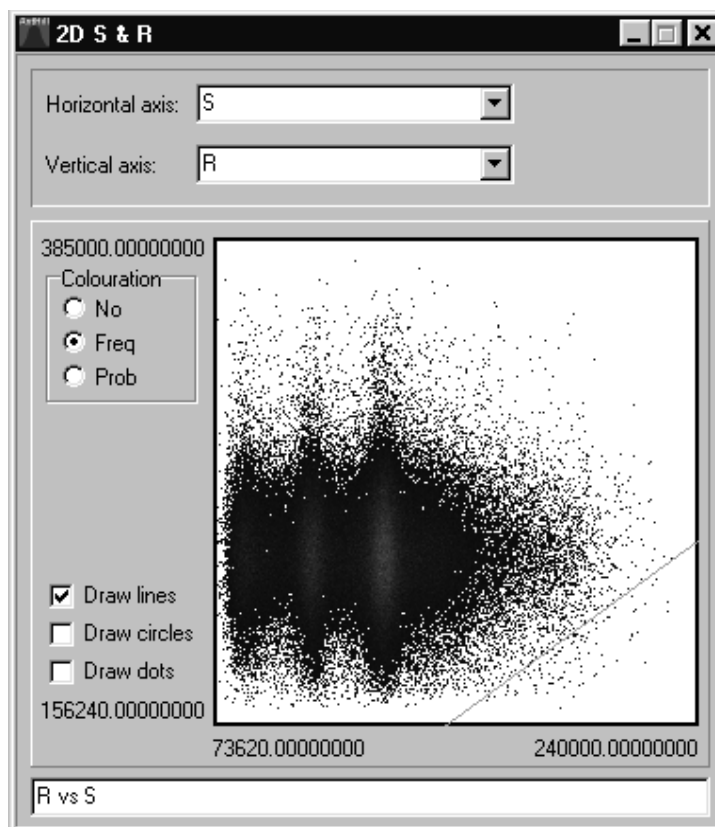
Například pro spolehlivostní funkci typu $RF = R - S$, kde $RF < 0$ reprezentuje selhání, lze pravděpodobnost selhání $p_j = P[R < S]$ určit z histogramu proměnné RF jako $p_j = P[RF < 0]$. Jak bylo uvedeno v kapitole 2.3.5, lze histogram považovat za reprezentaci jak diskrétního tak i spojitého rozdělení. Určování hodnot kvantilů a pravděpodobností je pro každý z obou případů odlišné, proto lze v programu Anthill pro Windows určit, o který z typů rozdělení se jedná. V případě spojitého rozdělení je pro určování hodnot kvantilů a pravděpodobností použita lineární interpolace uvnitř jednotlivých tříd. K určovaným hodnotám kvantilů patří i medián, což je 50%-ní kvantil.

Velikost paměti, potřebná pro ukládání histogramů, závisí na zvoleném počtu tříd jednotlivých histogramů. Pro každou třídu je použito jedno čtyřbytové číslo typu `longint`, tedy při stovkách až tisících tříd pro jeden histogram je třeba řádově tisíců bytů pro každou sledovanou proměnnou.

5.5.3 Záznam

Pro zvolené výstupní proměnné lze zaznamenávat posloupnosti všech hodnot získaných v jednotlivých krocích (Log). Z nich lze později zrekonstruovat celou historii provedené simulace. V takto uložených datech jsou obsaženy všechny dostupné informace, které bylo možné provedenou simulací získat. Jejich vyhodnocením lze získat

i údaje závislé na časovém průběhu posloupnosti, které jsou předchozími metodami potlačeny.



Obr. 5.5.3.1: 2D zobrazení zaznamenaných hodnot

Jednotlivé hodnoty jsou ukládány jako čísla s pohyblivou čárkou typu **double**, zabírající 8 bytů paměti. Celková velikost paměti, potřebná pro ukládání záznamů, je přímo úměrná součinu počtu sledovaných proměnných a počtu kroků. Při desítkách sledovaných proměnných a miliónech kroků je třeba řádově stovek megabytů paměti. Jelikož uložené záznamy není třeba v průběhu simulací číst, lze pro jejich ukládání použít virtuální paměť. Uložená data jsou při nedostatku fyzické paměti odkládána na pevný disk a jelikož nejsou v průběhu simulací čtena, nedochází jejich přesuny k podstatnému zpomalení.

Zaznamenané n -tice hodnot pro n výstupních proměnných lze znázornit jako body v n rozměrném prostoru. Program Anthill umožňuje zobrazit dvojrozměrný obraz průmětu těchto bodů do zvolené roviny (*mraveniště-anthill*), viz obrázek 5.5.3.1.

6 Další vývoj metody SBRA

Popsaná metoda SBRA a vytvořené programy umožňují posudek spolehlivosti prvků, dílců a jednoduchých konstrukčních soustav, vyžadující vyčíslení nejvýše desítek výrazů v explicitním tvaru s desítkami náhodných veličin. Při řešení rozsáhlých konstrukčních systémů lze předpokládat, že bude třeba řešit soustavy velkého počtu lineárních i nelineárních rovnic s řádově tisíci proměnnými. To bude vyžadovat použití kvalitativně odlišných výpočetních i implementačních postupů. [50, 21]. S ohledem k rozšiřování metody SBRA byla provedena analýza výpočetní složitosti jednotlivých částí programu Anthill, používaného jako základní nástroj pro určování spolehlivosti. Dále byla prakticky ověřena možnost implementace principů metody SBRA v jazyce Java s využitím objektového přístupu.

6.1 Výpočetní složitost metody SBRA

Při posuzování možnosti použití metody SBRA pro určování spolehlivosti rozsáhlých systémů byla posuzována výpočetní složitost jednotlivých částí programu Anthill pro Windows. Program Anthill je členěn, podobně jako většina ostatních programů na dvě hlavní části – výpočetní část, kde probíhá zpracování a ukládání dat a uživatelské rozhraní, zajišťující vstup a výstup. Při komunikaci si obě části obvykle mezi sebou vyměňují jen nevelké množství dat.

Uživatelské rozhraní předává výpočetní části veškerá vstupní data, v průběhu výpočtu dostává informace o stavu probíhajících výpočtů a po jejich skončení obdrží výstupní data k prezentaci. Do uživatelského rozhraní by bylo možné zahrnout i syntaktickou analýzu vstupních dat, potřebnou ke kontrole jejich správnosti. V současné verzi programu je syntaktická analýza prováděna ve výpočetní části a její výsledky jsou předávány do uživatelského rozhraní. Výpočetní složitost uživatelského rozhraní nebyla posuzována, neboť rychlost běhu této části programu neovlivňuje rychlost výpočtu ale pouze rychlost odezvy na vstupy od uživatele. Na současných počítačích nedochází k pozorovatelnému zpoždění.

Ve výpočetní části programu je po provedení syntaktické analýzy vstupních dat vytvořen a inicializován zásobníkový automat pro vyhodnocování modelu. Pro vstupní náhodné proměnné jsou vytvořeny a inicializovány příslušné generátory. Pro všechny sledované výstupní proměnné jsou připraveny a inicializovány datové struktury pro ukládání výsledků. Po spuštění simulace je v každém simulačním kroku vygenerován jeden náhodný vektor vstupních hodnot, pro tento vektor je vyhodnocen model a získán výsledný vektor výstupních hodnot. Simulační kroky jsou opakovány a po ukončení simulace jsou vyhodnoceny výsledky. Vzhledem k tomu, že inicializační část probíhá pouze jednou, nemá její rychlost na dobu výpočtu podstatný vliv. Proto byla posuzována výpočetní složitost pouze těch částí programu, které jsou prováděny v každém simulačním kroku.

6.1.1.1 Primární generátor náhodných čísel

Při použití jednoduchého kongruenčního generátoru je jeho časová složitost (ve vztahu k počtu generovaných hodnot n) $T_{cong} = k_{cong} n$, kde k_{cong} je konstanta závislá na konkrétní implementaci algoritmu. Paměťové nároky jsou minimální a na počtu generovaných hodnot nezávislé. Tento typ generátoru s délkou periody l lze použít pro řešení úloh s v vstupními náhodnými proměnnými vyžadujících řádově nejvýše N simulačních kroků, kde $Nv < l$. Pokud je potřebný větší počet simulačních kroků, je třeba použít jiný kongruenční generátor s delší periodou nebo využít některý z generátorů kombinovaných. Při použití výše popsaného míchacího generátoru se časová složitost zvýší na $T_{mix} = (2k_{cong} + k_{comb})n$ z důvodu nutnosti generovat v jednom kroku dvě náhodná čísla a provést jejich kombinaci ("míchání").

6.1.1.2 Generátor rozdělení

Pokud je pro generování rozdělení použit některý ze speciálních postupů, je jeho časová složitost (ve vztahu k počtu generovaných hodnot n) $T_{spec} = k_{spec} n$, kde k_{spec} je konstanta závislá na implementaci použitého algoritmu. Paměťové nároky jsou minimální a na počtu generovaných hodnot nezávislé.

Při využití aproximace diskrétním rozdělením je časová složitost $T_{dis} = k_{dis} n$, kde k_{dis} odpovídá generování spojitého rozdělení. Paměťová složitost je na počtu generovaných hodnot nezávislá, ale závisí na počtu m tabelovaných hodnot kvantilové funkce, a tedy na požadované přesnosti aproximace. Pokud je pro uložení hodnot použito dvou bytů, je $S_{dis} = 2m$.

Při využití aproximace po částech rovnoměrným rozdělením je časová složitost $T_{pww} = (k_{dis} + k_{uni}) n$, kde k_{uni} odpovídá generování spojitého rozdělení. Paměťová složitost opět nezávisí na počtu generovaných hodnot, ale na počtu m tabelovaných hodnot kvantilové funkce ($S_{pww} = 2m$).

6.1.1.3 Model

Simulační model $Y = M(X)$, popsaný v kapitole 5.3, dovoluje přímé vyhodnocení transformační funkce M , zadané v explicitním tvaru. Na základě infixového zápisu funkce M je vytvořen zásobníkový automat, použitý v každém simulačním kroku pro vyhodnocování funkce M pro vygenerovaný vektor vstupních proměnných X . Paměťové nároky jsou lineárně závislé na počtu operandů v zápisu transformační funkce, časové nároky jsou přibližně lineárně závislé na počtu operátorů.

6.1.1.4 Ukládání výsledků

Při zaznamenávání výsledků simulací pro následné určení základních statistik (střední hodnota μ , směrodatná odchylka σ a pod.) postačuje ukládat pouze několik numerických hodnot (počet simulací, součet hodnot sledovaných výstupních

proměnných, součet čtverců hodnot, atd.). V tomto případě jsou paměťové nároky zanedbatelné.

Při určování empirických rozdělení výstupních proměnných jsou pro sledované proměnné vytvářeny histogramy s předem určeným počtem tříd, závislým na požadované přesnosti. Paměťová složitost nezávisí na počtu ukládaných hodnot, ale na počtu tříd b jednotlivých histogramů. Pro každou třídu je použito čtyř bytů, což umožňuje zaznamenání absolutní četnosti v jedné třídě do 2^{32} , paměťová složitost je $S_{his} = 4b$.

Pokud je požadováno ukládání záznamů o celé historii výsledných hodnot, je pro každou sledovanou proměnnou v každém simulačním kroku zaznamenáno jedno reálné číslo typu `double`, využívající osmi bytů. Tomu odpovídá paměťová složitost $S_{log} = 8n$, kde n je počet simulačních kroků.

Časové nároky jsou ve všech případech lineárně závislé na počtu ukládaných hodnot.

6.1.1.5 Závislost počtu simulačních kroků na požadované přesnosti.

S pomocí centrální limitní věty lze ukázat (viz kapitola 2.5.2), že absolutní chyba výsledků získaných pomocí metody Monte Carlo klesá s $n^{-1/2}$, kde n je počet simulačních kroků (pro zvýšení přesnosti výsledků o jeden řád je třeba počet simulačních kroků zvýšit 100 krát). Tedy časová složitost vztahovaná k požadované přesnosti je $T_{mc} = n^2$.

6.1.2 Možnosti řešení rozsáhlých modelů

Z výše uvedeného rozboru výpočetní složitosti nejdůležitějších částí programu Anthill vyplývá, že časová i paměťová složitost úloh řešených současnou verzí programu Anthill je nejvýše lineárně závislá na počtu simulačních kroků, počtu vstupních a výstupních proměnných, přesnosti aproximace jejich distribučních funkcí atd. Počet potřebných simulačních kroků závisí na požadované přesnosti výsledků kvadraticky. Současná aplikace programu Anthill v metodě SBRA je omezena na řešení spolehlivosti jednotlivých prvků a jednoduchých systémů. Při rozšíření aplikací na řešení spolehlivosti rozsáhlých a nelineárních systémů, problémů elasto-plastických a dynamických dojde k řádovému zvýšení časové složitosti. Již při řešení soustav lineárních rovnic obvyklými postupy bude časová složitost řádu n^3 [40, 20]. V případě nelineárních rovnic se časová složitost dále zvýší. Řešení úloh tohoto typu metodou SBRA je pro systémy složené z tisíců prvků při potřebě řádově 10^6 simulací nad možností současných osobních počítačů. Jedním z možných řešení tohoto problému je využití paralelních počítačů. Paralelizace výpočtu metodou SBRA je poměrně snadná, jednotlivé simulace mohou být prováděny paralelně na jednotlivých procesorech, přičemž komunikace mezi procesy je minimální. Pro paralelizaci (vektORIZACI) generátorů pseudonáhodných čísel byly vytvořeny postupy, dovolující opakované provádění simulací se stejnými posloupnostmi generovaných čísel, což je potřebné pro ladění a testování programu [13].

Výpočetní složitost bude možné snížit při využití specifických vlastností simulovaných problémů. V některých případech lze využít skutečnosti, že se některé

simulace liší jen v nevelkém počtu parametrů, což dovolí při řešení využít již dříve získaných výsledků. Podobně lze souvislosti mezi řešením jednotlivých simulací využít při aplikaci metod jako je úplný nebo neúplný LU rozklad, metoda SSOR, výpočet přibližné inverzní matice nebo metody dekompozice oblastí [21]. Další možností je využití výsledků citlivostní analýzy.

Při rozšiřování metody SBRA na řešení spolehlivosti rozsáhlých systémů bude třeba v používaných programech implementovat některé z uvedených metod, případně vytvořit programy ve formě otevřených systémů, dovolujících využití specializovaných programů pro efektivní řešení dílčích problémů.

6.2 Využití objektových metod

První programy pro výpočty metodou SBRA byly vytvářeny koncem osmdesátých let dvacátého století. Jedním z cílů při vývoji metody SBRA bylo využití všeobecně dostupných osobních počítačů u nichž byl předpoklad, že se brzy stanou běžnou výbavou výzkumných pracovišť i projekčních kanceláří. Proto byly pro implementaci zvoleny šestnáctibitové osobní počítače standardu IBM PC. Jejich tehdejší konfigurace (viz tabulka 6.2.1.1) a operační systém MS-DOS s minimálními grafickými možnostmi, orientovaný na textovou komunikaci s uživatelem, vyžadovali optimalizaci vytvářeného programu, tvorbu specializovaného grafického prostředí, atd. Tomu odpovídal i použitý programovací styl, orientovaný na procedury, viz tabulka 6.2.1.2.

	1987	2002
procesor	Intel 8088 – 8/16 bitů, kmitočet 4,77 MHz	Intel Pentium4, AMD Athlon – 32/64 bitů, kmitočet 1 - 3 GHz
operační paměť	640 kB	256 MB
pevný disk	10 MB	10 - 100 GB
grafika	640*350, 16 barev	1024*768 - 1600*1200, 16 milionů barev
monitor	14"	17"
periferie	disketa 360kB	CD 650MB, Audio, ...

Tab. 6.2.1.1: Osobní počítače IBM PC

To, spolu s efektivní implementací programových bloků pro generování náhodných čísel, vyhodnocování modelu a ukládání výsledků, umožnilo vytvoření programů, dovolujících i na počítačích PC-XT provádět desítky tisíc simulací s mnoha náhodnými proměnnými v přijatelném čase. Z důvodu použitého programovacího stylu a rozsáhlé optimalizace programu jsou nesnadné další modifikace a rozšiřování již hotových programů. Pro další vývoj metody SBRA bude třeba rozšířit používané programy o nové vlastnosti a funkce, případně navrhnout otevřená řešení, dovolující spolupráci se specializovanými programy pro analýzu konstrukcí, efektivní řešení dílčích problémů

a pod. To bude vyžadovat celkové přepracování již existujících programů s využitím moderních programovacích technik.

Programovací styl	Abstrakce
Orientovaný na procedury	Algoritmy
Orientovaný na data	Data
Orientovaný na objekty	Třídy a objekty
Orientovaný na logiku	Cíle
Orientovaný na pravidla	Pravidla typu if-then

Tab. 6.2.1.2: Programovací styly

Jednou z možností při modifikaci existujících a tvorbě nových programů je i využití objektového přístupu [83]. Tento přístup byl použit již při vytváření 32-bitových verzí SBRA programů pro operační systém MS-Windows. V těchto programech zůstala optimalizovaná výpočetní část programu a objektové programování bylo použité při tvorbě grafického uživatelského rozhraní. Objektové řešení výpočetní části programu je naznačeno dále na příkladě implementace základních bloků programu Anthill v jazyce Java.

6.2.1 Příklad objektového řešení

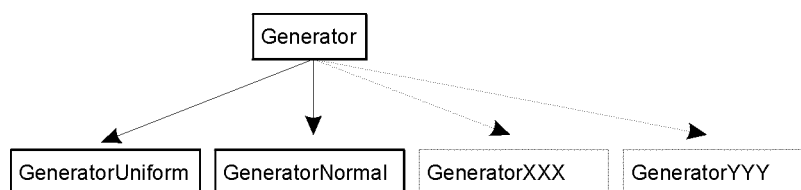
Naznačený příklad ukazuje možnost implementace principů metody SBRA v jazyce Java s využitím možností objektového přístupu. Objektové řešení umožňuje využití vytvořených základních tříd jako výchozího rámce pro budoucí rozšíření o nové vlastnosti při zachování již vybudované struktury. Implementace v jazyce Java zaručuje snadnou přenositelnost programu.

6.2.1.1 Primární generátor náhodných čísel

Pro generování základní posloupnosti pseudonáhodných čísel je použit lineární kongruenční generátor, realizovaný v třídě **PrimGenerator** na základě vzorce 2.4.1.2. V případech velkého počtu generovaných náhodných proměnných a velkého počtu simulačních kroků, kdy je perioda generované posloupnosti nedostatečná lze třídu **PrimGenerator** rozšířit a základní kongruenční generátor nahradit například některým z kombinovaných generátorů s velmi dlouhou periodou.

6.2.1.2 Generátor rozdělení

Pro generování posloupností s daným rozdělením jsou z abstraktní třídy **Generator** odvozeny jednotlivé generátory požadovaných rozdělení – **GeneratorNormal**, **GeneratorUniform**, atd. (viz. obrázek 6.2.1.1).



Obr. 6.2.1.1: Generátory zadaných rozdělání

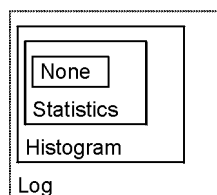
Specifikace použitého primárního generátoru v konstruktorech jednotlivých generátorů umožňuje snadnou budoucí záměnu tohoto primárního generátoru, případně využití několika primárních generátorů současně.

6.2.1.3 Model

Simulační model je popsán vztahem /4.2.1/. Jako základ pro vytváření simulačních modelů byla vytvořena abstraktní třída **Model**. Z ní byla pro řešení modelu $R = x$, $S = y$, $RF = R - S$ v programu **SBRASimTest1** odvozena třída **ModelRQRF**.

6.2.1.4 Ukládání výsledků

Výsledky simulací (vyhodnocení modelu) pro jednotlivé simulační kroky je třeba zaznamenávat, aby bylo po vykonání potřebného počtu simulačních kroků možno provést vyhodnocení simulací (viz. obrázek 6.2.1.2).



Obr. 6.2.1.2: Ukládání výsledků simulací

Výstupní proměnné, které nejsou potřebné pro vyhodnocování spolehlivostní funkce, není třeba zaznamenávat.

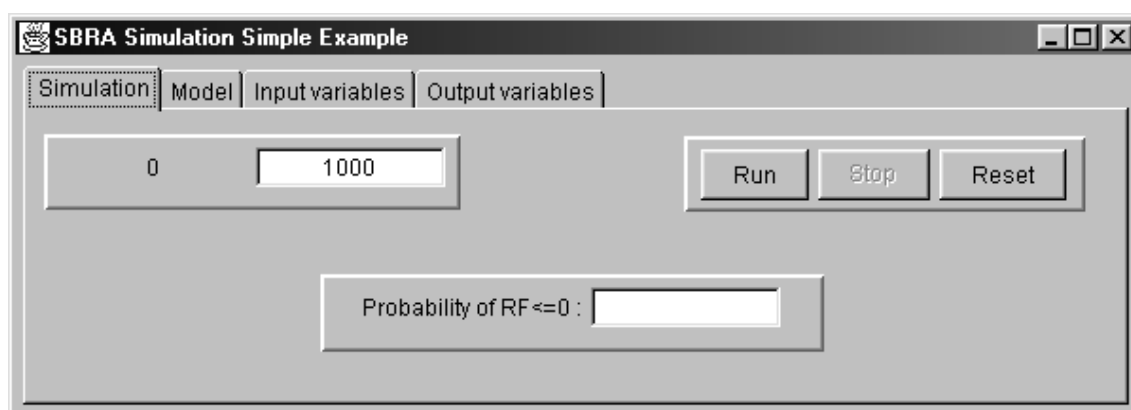
Pro zaznamenávání výsledků simulací ve formě numerických hodnot, potřebných pro následný výpočet základních charakteristik výstupních veličin (střední hodnota μ , směrodatná odchylka σ a pod.) slouží třída **CollectorStat**, ukládající pouze několik numerických hodnot, jako je počet simulací, součet hodnot sledované výstupní proměnné, součet čtverců hodnot atd. (viz kapitola 5.1.3.1).

Při určování empirických rozdělání, kvantilů a pravděpodobností pro výstupní veličiny (viz kapitola 5.1.3.2) je třída **CollectorStat** rozšířena na třídu **CollectorHist**, ve které jsou navíc vytvářeny histogramy s předem určeným počtem tříd, závislým na požadované přesnosti.

Pokud je požadováno ukládání záznamů o celé historii simulace (viz 5.1.3.3), je třída **CollectorHist** rozšířena na třídu **CollectorLog**, ukládající v každém simulačním kroku také hodnotu sledované proměnné.

6.2.1.5 Příklad simulace

Pomocí tříd **Generator**, **Model** a **Collector** byl vytvořen jednoduchý příklad simulace **SBRASim1**.



Obr. 6.2.1.3: Program SBRASimTest1

Odolnost R je definována

$$R = x \quad /6.2.1.1/$$

kde x je náhodná proměnná s normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 2,0$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 1,0$. Rozdělení je omezeno na rozsah hodnot 0,1 až 3,1.

Účinky S jsou definovány jako

$$S = y \quad /6.2.1.2/$$

kde y je náhodná proměnná s rovnoměrným rozdělením na intervalu (0,0, 1,0).

Spolehlivostní funkce RF je definována

$$RF = R - S \quad /6.2.1.3/$$

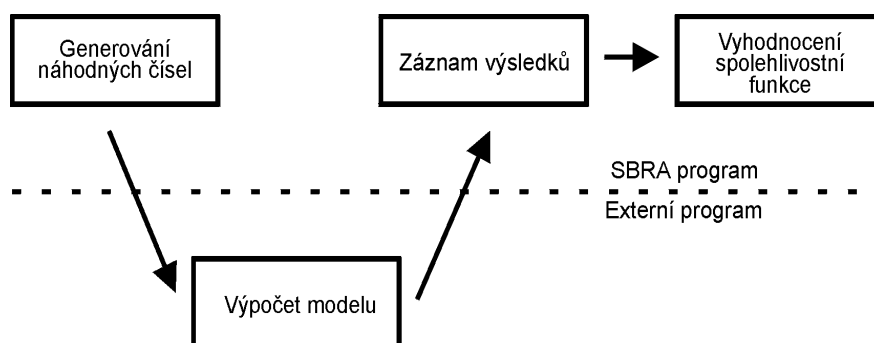
Situace kdy $R < S$ reprezentují nepříznivé případy, situace kdy $R \geq S$ jsou příznivé. Spolehlivost lze určit z vlastností rozdělení proměnné RF .

V každém simulačním kroku jsou generovány hodnoty vstupních proměnných x a y . Po vyhodnocení modelu $R = x$, $S = y$, $RF = R - S$ jsou hodnoty výstupních proměnných zaznamenány pro určení základních statistik (**CollectorStat**). Z hodnot výstupní proměnné RF je vytvářen histogram (**CollectorHist**) pro určení výsledné spolehlivosti (**getRFProb**). Celý postup řešení včetně jednoduchého grafického uživatelského rozhraní byl prakticky ověřen vytvořením programu **SBRASimTest1** v prostředí Borland JBuilder, viz obrázek 6.2.1.3.

6.3 Příprava programů a návaznost na existující specializované programy

Na základě provedené analýzy bylo navrženo oddělení uživatelského rozhraní od výpočetní části programu a přepracování obou částí. Při vytvoření nového grafického uživatelského rozhraní např. v jazyku Java bude možné použít tohoto uživatelského rozhraní bez nutnosti jakýchkoliv úprav na mnoha různých typech počítačů nezávisle na použitém operačním systému a hardwarové konfiguraci. Výstupem z tohoto rozhraní může být vygenerovaný soubor, obsahující kompletní popis úlohy. Tento soubor bude vstupem pro vlastní simulační program, provádějící generování vstupních náhodných veličin, řešení simulačního modelu a ukládání výsledků simulací. Pokud bude pro vytvoření programu pro simulaci použit jazyk, který je efektivně implementován na velkém množství počítačů a operačních systémů (např. jazyk C), bude možné spuštění výpočtu na počítačích různého výkonu, od osobních až po superpočítače. Navržená koncepce umožní mnoho režimů činnosti od interaktivního zpracování úloh na běžných osobních počítačích, přes využití clusterů počítačů, pracujících v počítačové síti, až po dávkové zpracování úloh na vzdáleném superpočítači.

Dalším navrženým krokem je rozdělení programu na samostatné části pro generování vstupních náhodných veličin, řešení simulačního modelu, ukládání výsledků simulací a vyhodnocování spolehlivostních funkcí, viz obrázek 6.3.1.



Obr. 6.3.1: Použití externích programů v metodě SBRA

To umožní použít v rámci metody SBRA již existující specializované programy pro řešení konstrukcí i další programy pro vytváření a řešení složitých výpočetních modelů.

Shrnutí a závěry

Metoda SBRA, založená na aplikaci simulačních postupů a metody Monte Carlo, umožňuje pravděpodobnostní analýzu spolehlivosti konstrukcí s využitím koncepce mezních stavů. Tím vytváří předpoklady ke kvalitativnímu zdokonalení posudku spolehlivosti konstrukcí. Použití simulačních postupů a navrženého způsobu reprezentace náhodných veličin a výpočtu pravděpodobnosti poruchy je v mnoha případech přehlednější, názornější a efektivnější než použití konvenčních metod.

Navržený způsob reprezentace vstupních náhodných veličin (zatížení, mechanických a geometrických vlastností, imperfekcí atd.) diskrétními nebo po částech rovnoměrnými rozděleními umožňuje použít jednotnou formu vyjádření náhodných veličin i v případech, kdy je běžně užívaný způsob popisu pomocí obvyklých parametrických rozdělení nevyhovující. V budoucnu bude třeba věnovat pozornost kvantifikaci chyby použité aproximace a jejímu vlivu při práci s extrémně malými pravděpodobnostmi. Určení empirických rozdělení výstupních veličin jednoduchou metodou Monte Carlo bez využití některé z technik pro snížení rozptylu dovoluje jednotné, snadno pochopitelné a prakticky použitelné řešení široké škály úloh. Výpočet pravděpodobnosti poruchy na základě znalosti empirického rozdělení výstupních veličin a spolehlivostní funkce umožňuje posudek spolehlivosti konstrukcí z hlediska různých kritérií mezních stavů bezpečnosti i použitelnosti. Navržený postup dovoluje řešení jak jednodílných, tak i vícedílných (vícerozměrných) problémů, které jsou konvenčními postupy obtížně řešitelné a o kterých se současné platné normy zmiňují jen neúplně.

Implementace navržených principů na osobních počítačích standardu IBM-PC umožňuje v současnosti použití metody SBRA pro pravděpodobnostní posudek jednotlivých prvků a jednoduchých konstrukčních soustav. Zvyšující se výkon dostupných výpočetních prostředků a rozvoj numerických metod a programovacích technik vytváří předpoklady pro rozšíření metody na řešení rozsáhlých systémů. To bude vyžadovat přepracování použitých programů a jejich rozšíření o nové vlastnosti a funkce a začlenění těchto programů do rozsáhlejších systémů, dovolujících spolupráci se specializovanými programy pro efektivní řešení dílčích problémů, jako je analýza konstrukcí nebo řešení soustav rovnic.

Při přechodu od deterministických a polopravděpodobnostních metod posudku spolehlivosti, používaných v současnosti, k metodám pravděpodobnostním bude nezbytné vytvořit nový ucelený systém norem, zahrnující specifikaci vstupních dat, použitých výpočetních postupů, atd. Pro praktickou aplikaci v projekční praxi bude třeba vytvořit databáze závazných vstupních dat, především zatížení, fyzikálních vlastností materiálů a geometrických vlastností použitých konstrukčních prvků, které by se měly stát součástí normativních předpisů. Zároveň bude třeba věnovat pozornost zdokonalování použitých modelů a celkovému pravděpodobnostnímu pojetí spolehlivosti konstrukcí.

Příloha A – Statistiky a charakteristiky náhodných veličin

Pro popis hlavních vlastností náhodných veličin bylo vytvořeno mnoho jednoduchých číselných charakteristik, sumarizujících jejich důležité vlastnosti. Podobně lze popsat číselnými hodnotami i hlavní vlastnosti statistických vzorků dat (náhodných výběrů ze základního souboru). V tomto případě se číselné hodnoty nazývají statistiky, případně výběrové charakteristiky. Přehled hlavních statistik a charakteristik náhodných veličin je uveden dále. Podrobnosti lze nalézt například v [46] a [45].

Momenty

K hlavním charakteristikám náhodných veličin patří momenty. Obecné momenty jsou definovány vztahy

$$\mu'_r = E(x)^r \quad /A.1/$$

Tedy pro náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad /A.2/$$

Pro náhodnou veličinu X s diskrétním rozdělením, nabývající hodnot x_1, x_2, \dots s pravděpodobnostmi $p_i = P[X=x_i]$, $i=1, 2, \dots$ je

$$\mu'_r = \sum_i x_i^r p_i \quad /A.3/$$

Pro soubory n dat x_1, \dots, x_n , lze určit hodnoty výběrových obecných momentů

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \quad /A.4/$$

Centrální momenty jsou definovány

$$\mu_r = E(x - \mu)^r \quad /A.5/$$

Pro náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx \quad /A.6/$$

Pro náhodnou veličinu X s diskrétním rozdělením, nabývající hodnot x_1, x_2, \dots s pravděpodobnostmi $p_i = P[X=x_i]$, $i=1, 2, \dots$ je

$$\mu_r = \sum_i (x_i - \mu)^r p_i \quad /A.7/$$

Pro soubory n dat x_1, \dots, x_n , lze určit hodnoty výběrových obecných momentů

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r \quad /A.8/$$

Některé z momentů mají zvláštní význam. První obecný moment je střední hodnota náhodné veličiny: $\mu_1 = \mu = E(X) = M(X)$. První centrální moment je vždy nulový: $\mu_1 = 0$, druhý centrální moment je rozptyl náhodné veličiny: $\mu_2 = \sigma^2 = D(X) = \text{var}(X)$. Pomocí třetího a čtvrtého centrálního momentu je definována šikmost a špičatost.

Střední hodnota, průměr

Střední hodnota, první obecný moment, je nejužívanější mírou centrální tendence, charakteristikou polohy. Ve fyzikálním smyslu reprezentuje těžiště rozdělení, střední bod působení gravitace [5]. Pro náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad /A.9/$$

Pro diskrétní rozdělení náhodné veličiny X , nabývající hodnot x_1, x_2, \dots s pravděpodobnostmi $p_i = P[X=x_i]$, $i=1, 2, \dots$ je

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i p_i \quad /A.10/$$

Pro soubory n dat x_1, \dots, x_n , má význam střední hodnoty výběrový (aritmetický) průměr

$$\bar{x} = m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad /A.11/$$

Střední hodnota není vhodná pro charakterizaci rozdělení s velký množstvím dat, lokalizovaných na "chvostech" (tails) rozdělení. Jako alternativu lze v takových případech použít medián nebo modus, popsany dále.

Medián

Medián je definován jako číslo \tilde{x} , pro které platí

$$F(\tilde{x}) \leq 0,5, \quad F(\tilde{x} + 0) \geq 0,5 \quad /A.12/$$

Podmínkami /A.12/ není medián obecně jednoznačně určen [3]. Jednoznačně je hodnota mediánu určena pro rozdělení s distribuční funkcí spojitou a rostoucí ve všech bodech [46].

Medián je středem datového souboru. Je to bod, dělící rozdělení na dvě části se stejnou pravděpodobností. Jedna polovina pozorování má hodnotu menší než medián, druhá polovina větší.

Pro datové soubory s lichým počtem prvků je mediánem hodnota, pro kterou leží stejný počet vzorků nad ní i pod ní. Pro soubory se sudým počtem prvků se za medián obvykle bere aritmetický průměr dvou prostředních hodnot, tj. střed mezi největší hodnotou z dolní poloviny a nejmenší hodnotou z horní poloviny vzorků [4]. Pro soubor n dat x_1, \dots, x_n , seřazených podle velikosti, je

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{pro } n \text{ liché} \\ \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}) & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases} \quad /A.13/$$

Hodnota mediánu bývá málo ovlivněna i velkou změnou několika hodnot x_i . Proto je někdy jeho použití jako míry centrální tendence výhodnější než použití výběrového průměru.

Modus

Modus rozdělení je hodnota, pro kterou funkce hustoty pravděpodobnosti, případně pravděpodobnostní funkce, dosahuje maxima. Pro náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je modus \hat{x} hodnota, pro kterou platí

$$f(\hat{x}) \geq f(x), -\infty < x < \infty \quad /A.14/$$

Pro veličinu X s diskrétním rozdělením je modus \hat{x} hodnota, pro kterou platí

$$P[X = \hat{x}] \geq P[X = x_i], i = 1, 2, \dots \quad /A.15/$$

Pro soubory dat je modus definován jako nejčetnější hodnota souboru [23]. Modus tedy není definován jednoznačně. Pro rozdělení s jedním globálním maximem reprezentuje modus centrální tendenci. V případě rozdělení s více lokálními maximy je modus určován pro každé lokální maximum zvlášť. V těchto případech, kdy střední hodnota ani medián nejsou jako ukazatele polohy centra použitelné, ukazují jednotlivé módy oblasti koncentrace dat.

Rozptyl

Rozptyl, zvaný též disperze nebo variance, druhý centrální moment, střední kvadratická odchylka, udává míru variability náhodné veličiny kolem střední hodnoty. Pro rozdělení koncentrovaná kolem jedné hodnoty je hodnota rozptylu malá, pro rozdělení, jejichž hodnoty jsou široce rozprostřeny je hodnota rozptylu vysoká. Rozptyl je ve fyzikálním významu momentem setrvačnosti rozdělení vzhledem k střední

hodnotě. Je součtem čtverců odchylek veličiny od její střední hodnoty. Pro spojitá rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je

$$\sigma^2 = D(X) = \text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \quad /A.16/$$

Pro diskrétní rozdělení, nabývajících hodnot x_1, x_2, \dots s pravděpodobnostmi $p_i = P[X=x_i]$, je

$$\sigma^2 = D(X) = \text{var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i \quad /A.17/$$

Pokud je pro soubory n dat x_1, \dots, x_n střední hodnota μ známá a priori, lze určit výběrový rozptyl ze vztahu

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad /A.18/$$

Pokud pro soubory dat střední hodnotu neznáme, je nahrazena výběrovým průměrem \bar{x} a pro určení výběrového rozptylu je použit vztah

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad /A.19/$$

V případech, kdy rozptyl nelze použít, např. při neexistenci jeho konečné hodnoty z důvodu velkého množství dat lokalizovaných na "chvostech" rozdělení, lze jako míru variability použít střední absolutní odchylku [22].

Směrodatná odchylka

Směrodatná odchylka σ je nejběžnější mírou míry variability veličiny vztaženou ke střední hodnotě. Směrodatná odchylka je kladnou hodnotou druhé odmocniny rozptylu. Ve fyzikálním významu směrodatná odchylka představuje poloměr otáčení hmoty rozdělení. Pro způsob určení a meze použitelnosti směrodatné odchylky a výběrové směrodatné odchylky platí údaje uvedené pro rozptyl.

Variační koeficient

Variační koeficient je bezrozměrná veličina, obvykle udávaná v procentech, definovaná jako poměr mezi směrodatnou odchylkou a střední hodnotou, případně mezi odmocninou z výběrového rozptylu a aritmetickým průměrem

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{s}{m} \quad /A.20/$$

Variační koeficient je definován, pokud $\mu \neq 0$, případně $m \neq 0$.

Šikmost

Šikmost, koeficient asymetrie, koeficient šikmosti udává míru "skloněnosti", asymetrie rozdělení. Šikmost je bezrozměrná veličina, definovaná na základě třetího centrálního momentu. Pro spojitá rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je

$$\alpha_3 = \frac{\mu'_3}{\sigma^3} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^3 f(x) dx}{\sigma^3} \quad /A.21/$$

Pro diskrétní rozdělení, nabývající hodnot x_1, x_2, \dots s pravděpodobnostmi $p_i = P[X=x_i]$, je

$$\alpha_3 = \frac{\mu'_3}{\sigma^3} = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^3 p_i}{\sigma^3} \quad /A.22/$$

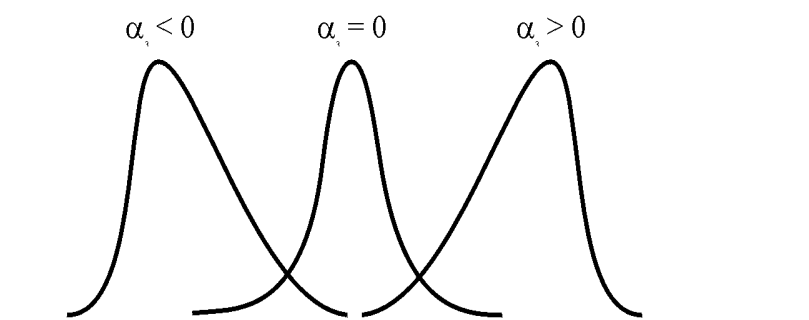
Pokud je pro soubory n dat x_1, \dots, x_n střední hodnota μ známá a priori, lze určit výběrovou šikmost ze vztahu

$$\alpha_3 = \frac{m'_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)^{3/2}} = \sqrt{n} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)^{(3/2)}} \quad /A.23/$$

Pokud pro soubory n dat x_1, \dots, x_n střední hodnotu neznáme, je nahrazena aritmetickým průměrem \bar{x} a pro určení výběrové šikmosti je použit vztah

$$\alpha_3 = \frac{m'_3}{s^3} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}} = \sqrt{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{(3/2)}} \quad /A.24/$$

Je-li šikmost α_3 nulová, je rozdělení symetrické kolem svého středu. Pokud je $\alpha_3 > 0$, má rozdělení rozprostřenější pravý chvost, rozptyl velkých hodnot je větší než rozptyl malých hodnot. Střední hodnota takového rozdělení je větší než medián a obě hodnoty jsou větší než modus. Pro $\alpha_3 < 0$ je situace opačná, viz obrázek A.1.



Obr. A.1: Šikmost

Špičatost

Špičatost, koeficient špičatosti, koeficient excesu, je mírou relativní výšky modu vzhledem ke zbytku rozdělení. Koeficient špičatosti je bezrozměrná veličina, definovaná na základě čtvrtého centrálního momentu

$$\alpha_4 = \frac{\mu'_4}{\sigma^4} \quad /A.25/$$

Míra špičatosti podle vztahu /A.25/ je pro normální rozdělení $\alpha_4 = 3$. Proto bývá pro koeficient špičatost používán vztah

$$\alpha_4 = \frac{\mu'_4}{\sigma^4} - 3 \quad /A.26/$$

Pro spojitá rozdělení s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ je

$$\alpha_4 = \frac{\mu'_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^4 f(x) dx}{\sigma^4} - 3 \quad /A.27/$$

Pro diskrétní rozdělení, nabývající hodnot x_1, x_2, \dots s pravděpodobnostmi $p_i = P[X=x_i]$, je

$$\alpha_4 = \frac{\mu'_4}{\sigma^4} = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^4 p_i}{\sigma^4} - 3 \quad /A.28/$$

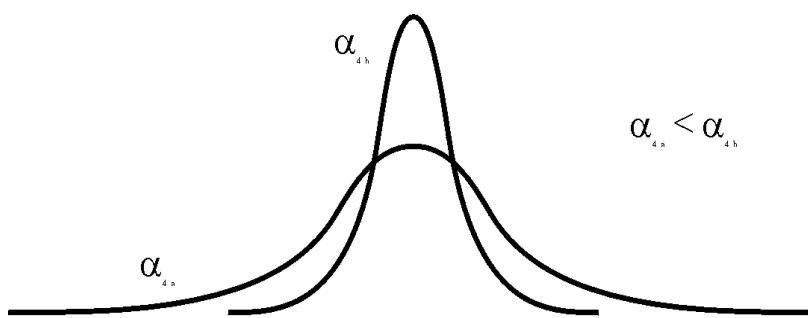
Pokud je pro soubory n dat x_1, \dots, x_n střední hodnota μ známá a priori, lze určit výběrovou šikmost ze vztahu

$$\alpha_4 = \frac{m'_4}{s^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)^2} - 3 = n \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right)^2} - 3 \quad /A.29/$$

Pokud pro soubory n dat x_1, \dots, x_n střední hodnotu neznáme, je nahrazena aritmetickým průměrem \bar{x} a pro určení výběrové šikmosti je použit vztah

$$\alpha_4 = \frac{m'_4}{s^4} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} - 3 = (n-1) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2} - 3 \quad /A.30/$$

Pokud je hodnota špičatost vysoká, modus rozdělení více vyčnívá nad zbylou částí rozdělení, rozdělení je "špičatější", při nízkých hodnotách špičatosti je rozdělení "plošší", viz obrázek A.2.



Obr. A.2: Špičatost

Kvantil

Pro náhodnou veličinu X je P -kvantil nejmenší číslo x_P , pro které platí

$$F(x_P) \leq P, \quad F(x_P + 0) \geq P \quad /A.31/$$

Těmito podmínkami není medián jednoznačně určen, neboť může existovat interval hodnot x_P , splňujících podmínky /A.31/. Pro rozdělení s distribuční funkcí spojitou a rostoucí ve všech bodech jsou všechny kvantily určeny jednoznačně [46]. Pro veličiny se spojitým rozdělením platí

$$F(x_P) = P \quad /A.32/$$

Hodnotu P -kvantilu lze přímo určit z kvantilové funkce F^{-1} [3]

$$x_P = F^{-1}(P) \quad /A.33/$$

Hodnoty pravděpodobnosti bývají při určování kvantilů vyjadřovány v procentech. Např 90%-ní kvantil je kvantil $x_{0,90}$.

Kovariance a korelace

Veličiny X a Y jsou statisticky nezávislé, pokud jevy $\{X \in A\}$ a $\{Y \in B\}$ jsou nezávislé, tedy

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A]P[Y \in B] \quad /A.34/$$

Potom

$$F(x, y) = F(x)F(y) \quad /A.35/$$

$$f(x, y) = f(x)f(y) \quad /A.36/$$

Lineární závislost dvou náhodných veličin X a Y lze zjistit pomocí kovariance, která je definovaná

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad /A.37/$$

Pokud pro náhodné veličiny X a Y je $\text{cov}(X, Y) = 0$, nazývají se tyto veličiny nekorelované. Pokud jsou veličiny X a Y nezávislé, jsou i nekorelované. Lze však nalézt dvojice závislých veličin pro které je $\text{cov}(x, y) = 0$.

Pro lineární kombinaci dvou veličin platí

$$E(aX + bY) = aEX + bEY \quad /A.38/$$

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y) \quad /A.39/$$

Pro nekorelované veličiny je hodnota kovariance nulová. Z toho lze pro součet nebo rozdíl $Z = X \pm Y$ nekorelovaných veličin X a Y odvodit

$$EZ = EX \pm EY \quad /A.40/$$

$$\text{var } Z = \text{var } X + \text{var } Y \quad /A.41/$$

Normováním kovariance směrodatnými odchylkami je definován korelační koeficient, který udává míru lineární stochastické závislosti dvou veličin s normálním rozdělením

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var } X \text{var } Y}} \quad /A.42/$$

Platí, že $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$. Velikost korelačního koeficientu se nemění s lineární transformací měřítek náhodných veličin X a Y .

Pro dva soubory dat lze určit výběrový korelační koeficient

$$\rho(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad /A.43/$$

Pro detekci závislosti v posloupnosti slouží autokorelační funkce. Její hodnoty určíme pro posloupnost n hodnot x_1, \dots, x_n jako hodnoty korelačního koeficientu pro posunutí k

$$r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad /A.44/$$

Příloha B – Historie metody SBRA

Koncem osmdesátých let dvacátého století se objevily první dostupné šestnáctibitové osobní počítače standardu IBM PC. Tehdejší konfigurace (procesor Intel 8088, pracující na kmitočtu 4,77 MHz, 640 kB operační paměti, pevný disk 10 MB) umožnila vývoj prvních prakticky použitelných programů pro simulaci na osobních počítačích, založených na metodě Monte Carlo. Velikost operační paměti dovolila řešení modelů s mnoha náhodnými vstupními veličinami, výpočetní výkon dostával k provádění desítek tisíc simulací v přijatelném čase a grafické schopnosti byly dostatečné pro přehlednou prezentaci výsledků.

1987-1990 Řešení dílčích problémů

Popis vstupních náhodných veličin

Prvním krokem v přípravě metody SBRA byla reprezentace zatížení *křivkami trvání zatížení* (LDC – Load Duration Curves) (viz obrázek 4.3.6). To, na rozdíl od dosavadní reprezentace jednotlivých zatížení např. charakteristickou (normovou) hodnotou a součinitelem zatížení, dovolilo při rozboru kombinace účinků zatížení účinně uplatnit simulační techniky a metodu Monte Carlo.

Rozbor účinků kombinace zatížení

K numerickému řešení kombinace účinků zatížení byl vytvořen původní počítačový program ResCom (*Response Combination*), který umožňuje vyšetřování odezvy konstrukce na jednodílnou kombinaci až šestnácti nezávislých, časově proměnných náhodných zatížení. Všechna použitá zatížení jsou vyjádřena v neparametrické formě pomocí histogramů. Navržená metoda řešení kombinací účinků zatížení byla po prvé prezentována na ocelářské konferenci v Hustopeči v prosinci 1988 [53] a publikována v časopise Pozemní stavby v roce 1989 [52]. V následujících letech došlo k rozšíření metodiky na řešení vícekomponentních kombinací účinků zatížení a pro často používané křivky trvání zatížení byla založena databáze.

Vyšetřování a definice odolnosti

V roce 1989 byla věnována pozornost vyšetřování a definici odolnosti prvků a dílců konstrukcí s využitím simulační techniky. Bylo zavedeno, podobně jako při rozboru kombinací účinků zatížení, vyjádření náhodných mechanických vlastností materiálů, variability geometrických vlastností i dalších náhodně proměnných veličin neparametrickým způsobem. Pro studii kombinace materiálů byl vytvořen simulační program MatCom (*Material Combination*), umožňující vyjádření materiálových vlastností pomocí křivek trvání, distribučních nebo pravděpodobnostních funkcí a vyšetřování jejich kombinací [59].

1991-1992 Výpočet pravděpodobnosti poruchy

Na základě dílčích poznatků byl vytvořen postup umožňující výpočet pravděpodobnosti poruchy. Byl vypracován původní program M-Star, dovolující určit odolnost odpovídající zvolené pravděpodobnosti, dimenzování podle zvolené pravděpodobnosti poruchy a výpočet pravděpodobnosti poruchy pro zadanou konstrukční část a zadanou kombinaci zatížení. Postupné zdokonalování programu vedlo k vytvoření efektivního výpočetního nástroje na bázi simulačních technik a metody Monte Carlo pro řešení jednokomponentních problémů, použitelného i mimo rámec posudku spolehlivosti konstrukcí.

Dosažené výsledky vedly k rozšiřování navržené metodiky na rozmanitá kritéria posudku bezpečnosti a použitelnosti konstrukcí kovových, betonových, dřevěných a spřažených [57]. Na základě zájmu AISC (American Institute for Steel Construction) Chicago byla vypracována hodnotící studie týkající se spolehlivosti konstrukcí navržených podle norem AISC-LRFD [48] a program LoadCom (*Load Combination*), dovolující určení kombinace účinků zatížení simulační technikou a porovnání takto získaných výsledků s výsledky určenými podle norem DIN [18], evropské normy Eurocode [25], norem používaných v USA a Kanadě [48, 10] atd.

K rozšířením aplikace navrženého postupu patří vyšetřování akumulace poškození a odpovídající program DamAc (*Damage Accumulation*), který byl vytvořen jako specializovaný nástroj pro vyšetřování akumulace poškození se zaměřením na modely používané pro popis chování dřevěných konstrukcí. Program umožňuje určení akumulovaného poškození prvků, vystavených účinkům kombinace až šestnácti nezávislých, časově proměnných náhodných zatížení [58].

1993-1998 Vícekomponentní problémy

Na dosud vypracované programy (zejména na program M-Star určený především k řešení jednokomponentních problémů) navázal program řešení vícekomponentních problémů Anthill pro MS-DOS, dovolující zobrazení vícerozměrných náhodných proměnných a následné vyhodnocování spolehlivostních funkcí [56].

V uvedeného období byly dosažené výsledky shrnuty a předloženy jako původní pravděpodobnostní metoda pro posuzování spolehlivosti konstrukcí, dovolující výpočet pravděpodobnosti poruchy prvků, dílců a jednoduchých konstrukcí. Navržená metoda byla nazvána SBRA („Simulation-Based Reliability Assessment“) a souhrnně poprvé knižně publikována nakladatelstvím CRC Press, Inc. Florida v U.S.A v roce 1995 [54].

1998-2000 Programy pro MS-Windows

V uvedeném období byla řešena problematika zavedení metody SBRA do výuky na vysokých školách a do projekční praxe. V rámci programu Leonardo da Vinci byl vytvořen mezinárodní tým, složený z 33 spolupracovníků. Výsledkem spolupráce je kniha a CD-ROM „Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Basics, Exercises, Software“ [50].

Významné zvýšení výkonu osobních počítačů a rozšíření 32-bitových operačních systémů umožnilo v rámci rozvoje a zdokonalování metody SBRA vytvoření programů pro operační systém MS-Windows. Vytvořením verze programu LoadCom pro Windows bylo ověřeno že snížení efektivity přeloženého kódu je dostatečně kompenzováno zvýšeným výkonem běžně dostupných počítačů. Navíc lze u programů určených pro operační systém Windows snadno vytvořit standardní uživatelské rozhraní, což usnadňuje ovládání programů. Proto byl vytvořen program Anthill pro Windows, který spojuje a rozšiřuje vlastnosti doposud užívaných programů pro MS-DOS.

2001-2002 Příprava k řešení rozsáhlých systémů

V roce 2001 byla zahájena příprava rozšíření metody SBRA, dosud uplatnitelné při posudku prvků, dílců a jednoduchých konstrukčních soustav, též na rozsáhlé systémy a to jak z hlediska celkového pravděpodobnostního pojetí spolehlivosti, tak z hlediska odpovídajícího programového vybavení [51]. Na základě analýzy výpočetní složitosti jednotlivých částí programu Anthill (viz kapitola 6.1) bylo navrženo oddělení uživatelského rozhraní od výpočetní části programu a přepracování obou částí, jak je popsáno v kapitole 6.3. Další rozdělení výpočetního programu na samostatné části pro generování vstupních náhodných veličin, řešení simulačního modelu, ukládání výsledků simulací a vyhodnocování spolehlivostních funkcí umožní využití existujících programů pro efektivní řešení výpočetního modelu.

Příloha C – Programy vytvořené v rámci metody SBRA

Jak již bylo uvedeno v příloze B, při vývoji metody SBRA byly nejprve řešeny dílčí problémy jako určení kombinace zatížení a jejich účinků, analýza kombinace materiálů, výpočet akumulovaného poškození atd. Pro jejich řešení byly vytvořeny specializované programy ResCom, LoadCom, MatCom a DamAc. Pro řešení komplexnějších problémů jako určování spolehlivosti, trvanlivosti, použitelnosti, stability, únavy, lomu atd. byly vytvořeny dva programy – M-Star a Anthill. Tyto programy umožňují snadnou modifikaci použitého modelu, změnu jeho parametrů a použití různých vstupních proměnných. Oba programy jsou použitelné i mimo rámec metody SBRA.

ResCom

Program ResCom (Response Combination) je určen pro pravděpodobnostní výpočet kombinace zatížení nebo jejich účinků metodou SBRA. Program umožňuje určení kombinace až šestnácti vzájemně statisticky nezávislých zatížení. Každé zatížení je charakterizováno extrémní hodnotou (maximální intenzitou) a odpovídajícím rozdělením, aproximovaným diskretním rozdělením. Simulací Monte Carlo je vytvořen histogram kombinace, jenž je použit jako empirická funkce hustoty pravděpodobnosti. Z této funkce hustoty lze kromě absolutních extrémních hodnot (minima a maxima) určit i "redukované" extrémní hodnoty pro několik zadaných pravděpodobností. "Redukované" maximální hodnoty L_{max} jsou pro zadanou pravděpodobnost p_L určeny přímo jako hodnoty kvantilů $L_{max}: P[L \leq L_{max}] = p_L$. "Redukované" minimální hodnoty L_{min} jsou pro zadanou pravděpodobnost p_L určeny jako hodnoty kvantilů $L_{min}: P[L \leq L_{min}] = 1 - p_L$. "Redukované" hodnoty vyjadřují takové velikosti kombinací zatížení nebo jejich účinků, které nejsou se zadanou pravděpodobností překročeny.

Analýza kombinace zatížení

Určení kombinace zatížení je jedním ze základních úkolů při posuzování spolehlivosti konstrukcí. Následující příklad ukazuje výpočet kombinace zatížení metodou SBRA. Kombinace zatížení je vyjádřena

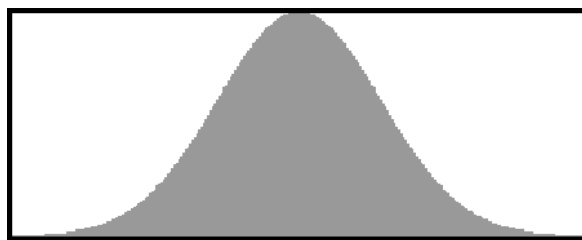
$$L = DL + SL + LL + WL + SN + EQ + CH + CV \quad /C.1.1/$$

kde L je výsledná kombinace zatížení, DL je stálé zatížení, SL je krátkodobé nahodilé zatížení, LL je dlouhodobé nahodilé zatížení, WL je zatížení větrem, SN je zatížení sněhem, EQ je zatížení zemětřesením a CH a CV jsou vodorovné a svislé složky zatížení jeřábem. Všechna zatížení jsou charakterizována extrémní hodnotou (maximální intenzitou) a odpovídajícím rozdělením, např.

$$DL = D_{l_{max}} D_{l_{var}} \quad /C.1.2/$$

Stálé zatížení DL má rozdělení DEAD1 (viz obrázek C.1.1), definované na intervalu $[0,818, 1,0]$, které je odvozeno z normálního rozdělení. Normální rozdělení

$N(1,0, 0,032)$ bylo omezeno na interval $[0,9, 1,1]$ a následně transformováno tak, aby horní mez byla 1,0.



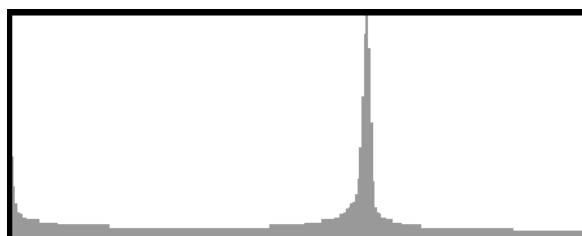
Obr. C.1.1: Rozdělení DEAD1

Krátkodobé nahodilé zatížení SL má rozdělení SHORT1 (viz obrázek C.1.2), definované na intervalu $[0,0, 1,0]$. Pravděpodobnost nulové hodnoty zatížení je 80%.



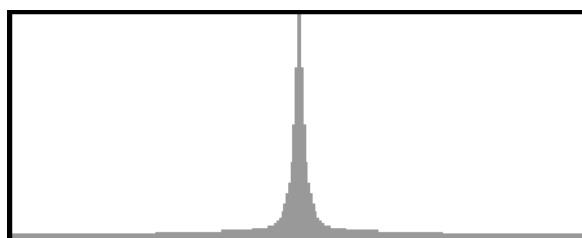
Obr. C.1.2: Rozdělení SHORT1

Dlouhodobé nahodilé zatížení LL má bimodální rozdělení LONG1 (viz obrázek C.1.3), definované na intervalu $[0,0, 1,0]$. Mody rozdělení mají hodnoty 0,0 a 0,625.



Obr. C.1.3: Rozdělení LONG1

Zatížení větrem WL pro oblasti s intenzivním větrem má symetrické rozdělení WIND1 (viz obrázek C.1.4), definované na intervalu $[-1,0, 1,0]$.



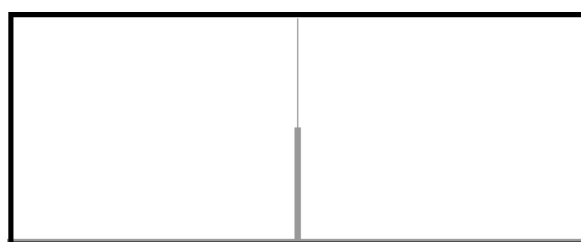
Obr. C.1.4: Rozdělení WIND1

Zatížení sněhem SN pro oblasti s dvouměsíčním sněhem má rozdělení SNOW1 (viz obrázek C.1.5), definované na intervalu $[0,0, 1,0]$.



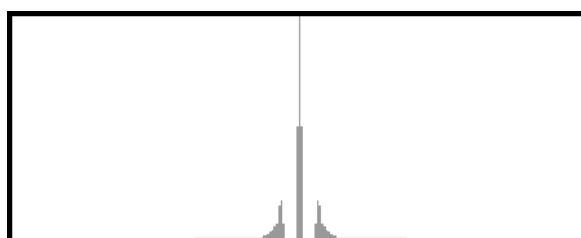
Obr. C.1.5: Rozdělení SNOW1

Zatížení zemětřesením EQ má symetrické rozdělení EARTH (viz obrázek C.1.6), definované na intervalu $[-1,0, 1,0]$.



Obr. C.1.6: Rozdělení EARTH

Vodorovné síly zatížení jeřábem CH mají symetrické rozdělení CRANE-H (viz obrázek C.1.7), definované na intervalu $[-1,0, 1,0]$.



Obr. C.1.7: Rozdělení CRANE-H

Svislé síly zatížení jeřábem CV mají rozdělení CRANE-V (viz obrázek C.1.8), definované na intervalu $[0,0, 1,0]$.



Obr. C.1.8: Rozdělení CRANE-V

Extrémní hodnoty jednotlivých zatížení pro případy A až L shrnuje tabulka C.1.1. Součet extrémních hodnot je ve všech případech 100,0. Předpokládá se statistická nezávislost všech zatížení.

Maxima účinků zatížení vyjádřená osovými silami [kN]									
	DL	SL	LL	WL	SN	EQ	CH	CV	Celkem
A	100.0								100.0
B	50.0	50.0							100.0
C	50.0		50.0						100.0
D	33.4	33.3	33.3						100.0
E	33.4	33.3		33.3					100.0
F	25.0		25.0	25.0	25.0				100.0
G	33.4			33.3		33.3			100.0
H	25.0	25.0		25.0	25.0				100.0
I	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0				100.0
J	20.0	15.0	15.0	15.0	15.0	20.0			100.0
K	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	100.0
L				50.0		50.0			100.0

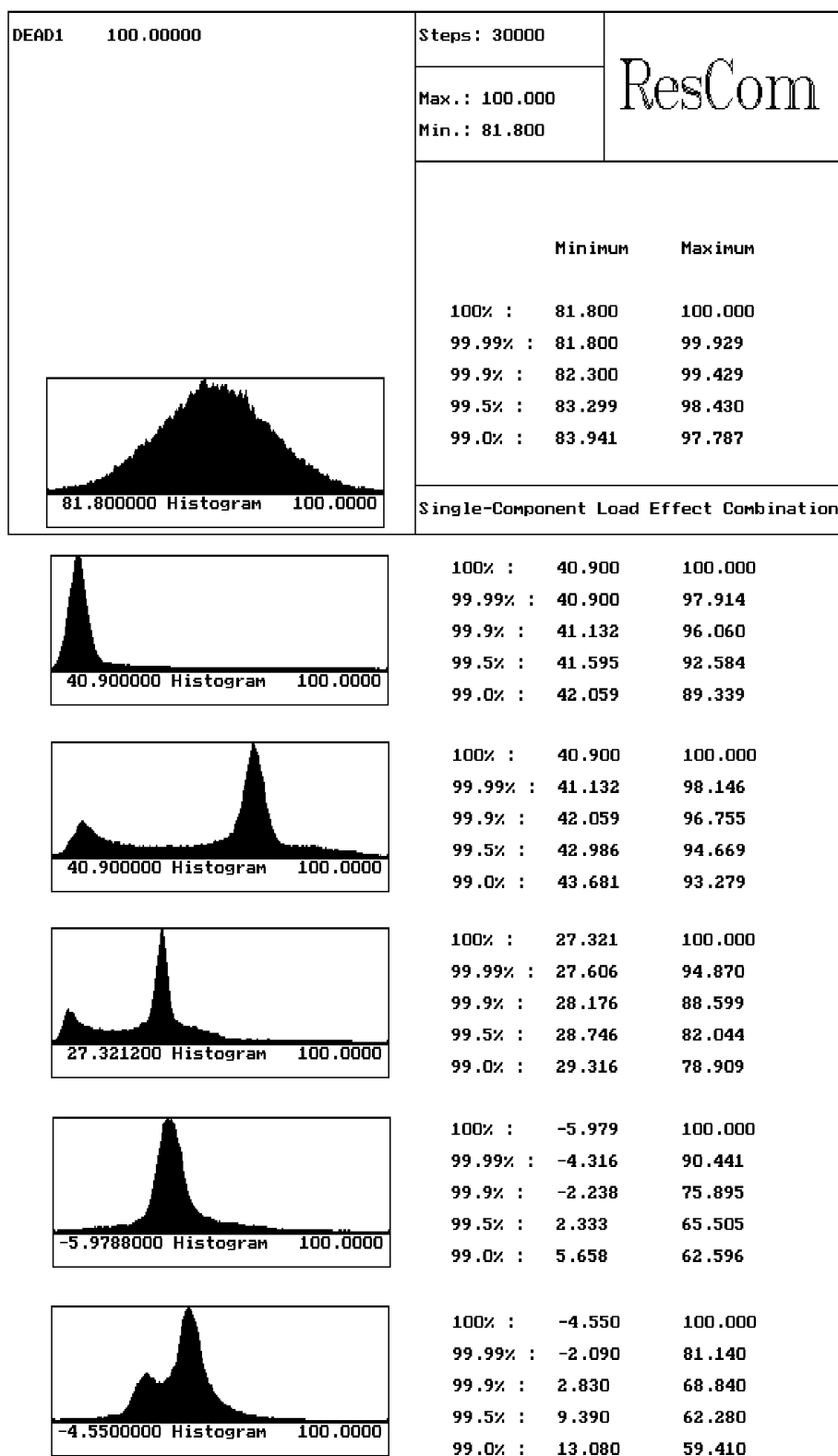
Tab. C.1.1: Kombinace zatížení A – L

Tvary empirických funkcí hustoty pravděpodobnosti, určené pro jednotlivé případy pomocí programu ResCom, spolu s výslednými maximálními a minimálními hodnotami (kvantily) pro pravděpodobnosti 1,00, 0,9999, 0,999, 0,995 a 0,99 jsou na obrázcích C.1.9 a C.1.10.

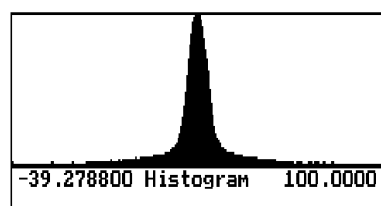
Maximální hodnoty pro pravděpodobnost 0,995 ($P[L \leq L_{99,5}] = 0,995$) jsou shrnuty v tabulce C.1.2. Porovnáním hodnot lze pozorovat výraznou závislost vypočtených kvantilů na rozdělení vstupních náhodných veličin, jejíž vliv bývá při výpočtu deterministickými nebo polopravděpodobnostními postupy potlačován.

Případ	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
$Q_{99,5}$	98,4	92,6	94,7	82,0	65,5	62,3	60,1	51,6	53,3	46,0	38,6	45,1

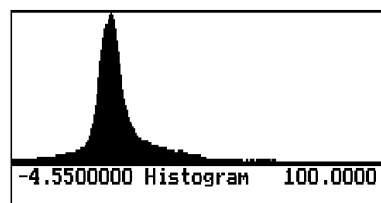
Tab. C.1.2: Extrémní maximální hodnoty kombinací zatížení pro pravděpodobnost 0,995



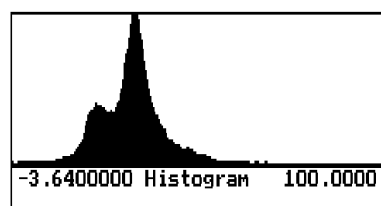
Obr. C.1.9: Kombinace zatížení A – F



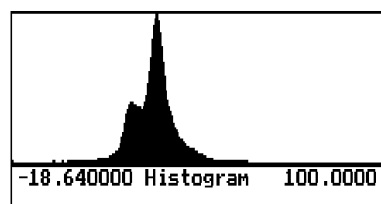
100% :	-39.279	100.000
99.99% :	-23.985	80.883
99.9% :	-5.415	64.498
99.5% :	-0.499	60.128
99.0% :	3.324	56.851



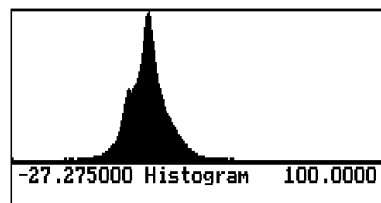
100% :	-4.550	100.000
99.99% :	-3.320	69.660
99.9% :	-1.680	59.820
99.5% :	2.420	51.620
99.0% :	4.880	48.750



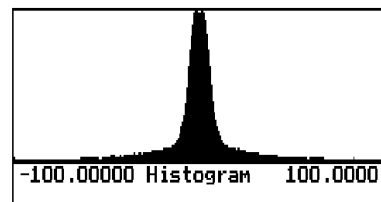
100% :	-3.640	100.000
99.99% :	-1.608	67.485
99.9% :	2.456	59.763
99.5% :	8.147	53.260
99.0% :	10.992	50.822



100% :	-18.640	100.000
99.99% :	-5.148	56.731
99.9% :	3.692	50.683
99.5% :	8.810	46.030
99.0% :	11.136	43.239



100% :	-27.275	100.000
99.99% :	-8.808	48.092
99.9% :	-1.820	42.601
99.5% :	2.173	38.609
99.0% :	4.169	36.113

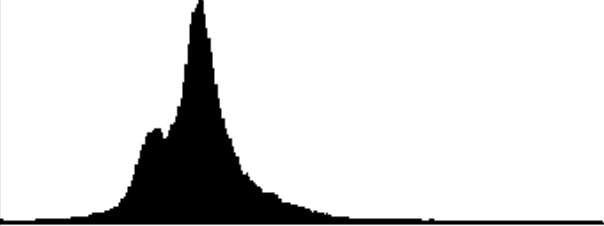


100% :	-100.000	100.000
99.99% :	-73.333	70.980
99.9% :	-51.373	51.373
99.5% :	-45.882	44.314
99.0% :	-40.392	39.608

Obr. C.1.10: Kombinace zatížení G – L

LoadCom

Program LoadCom (Load Combination) umožňuje pravděpodobnostní výpočet kombinace zatížení nebo jejich účinků simulační technikou metodou SBRA a porovnání takto získaných výsledků s výsledky určenými podle norem DIN, evropské normy Eurocode, norem používaných v USA (metoda dovolených namáhání – Allowable Stress Design, ASD a metoda částečných součinitelů – Partial Factor Design, ASCE/AISC-LRFD) a Kanadě.

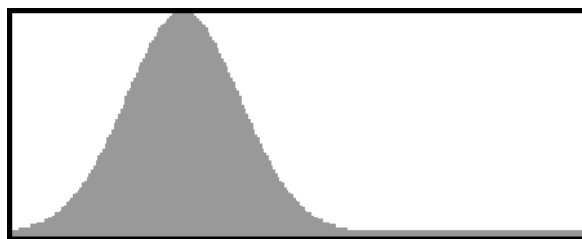
Load	Nominal	Minimum	Maximum	Steps: 30000	LoadCom TM	
				Units: Kips Country: USA		
Dead	1.0000000	0.9000000	1.4000000			
LongLast	2.0000000	0.0000000	3.2000000			
ShortLast	3.0000000	0.0000000	4.8000000		Minimum	Maximum
Snow	2.0000000	0.0000000	3.2000000			
Wind	3.0000000	-3.9000000	3.9000000	LRFD Common	-3.0000000	8.4000000
EarthQuak	1.0000000	-1.0000000	1.0000000	ASD	-2.0000000	6.2500000
				1.000000		
				0.999900		
				0.999000		
				0.990000		
Load Effect Combination, Single-Component Variable						
F1-Help				F9-Run AltX-Exit		

Obr. C.2.1: LoadCom pro MS-DOS

V souladu s některými normami založenými na metodě částečných součinitelů lze zvolit důležitost posuzované konstrukce (Common pro běžné konstrukce nebo Low Importance/Exception pro konstrukce méně významné, dočasné a pod.). V případě výpočtu metodou SBRA je možné volit několik různých úrovní pravděpodobnosti pro kterou jsou vypočteny hodnoty kombinací, které nejsou se zadanou pravděpodobností překročeny.

Pro výpočet kombinací lze použít až šesti zatížení – stálé zatížení (Dead load, *DL*), dlouhodobé nahodilé (Long Lasting load, *LL*), krátkodobé nahodilé (Short Lasting load, *SL*), zatížení sněhem (Snow load, *SN*), zatížení větrem (Wind load, *WL*) a zatížení zemětřesením (Earthquake load, *EQ*). Uvedená zatížení mají následující vlastnosti:

Stálé zatížení *DL* má rozdělení DEAD-S (viz obrázek C.2.2), definované na intervalu [0,43, 1,0], které je odvozeno z normálního rozdělení. Normální rozdělení $N(1,0, 0,032)$ bylo omezeno na interval [0,9, 1,2], dodefinováno na intervalu (1,2, 1,4] připojením rovnoměrného rozdělení a následně transformováno tak, aby horní mez byla 1,0.



Obr. C.2.2: Rozdělení DEAD-S

Dlouhodobé nahodilé zatížení LL má bimodální rozdělení LONG1, popsané dříve.

Krátkodobé nahodilé zatížení SL má rozdělení SHORT2 (viz obrázek C.2.3), definované na intervalu $[0,0, 1,0]$. Pravděpodobnost nulové hodnoty zatížení je 50%.



Obr. C.2.3: Rozdělení SHORT2

Zatížení sněhem SN pro oblasti s šestiměsíčním sněhem má rozdělení SNOW3 (viz obrázek C.2.4), definované na intervalu $[0,0, 1,0]$.

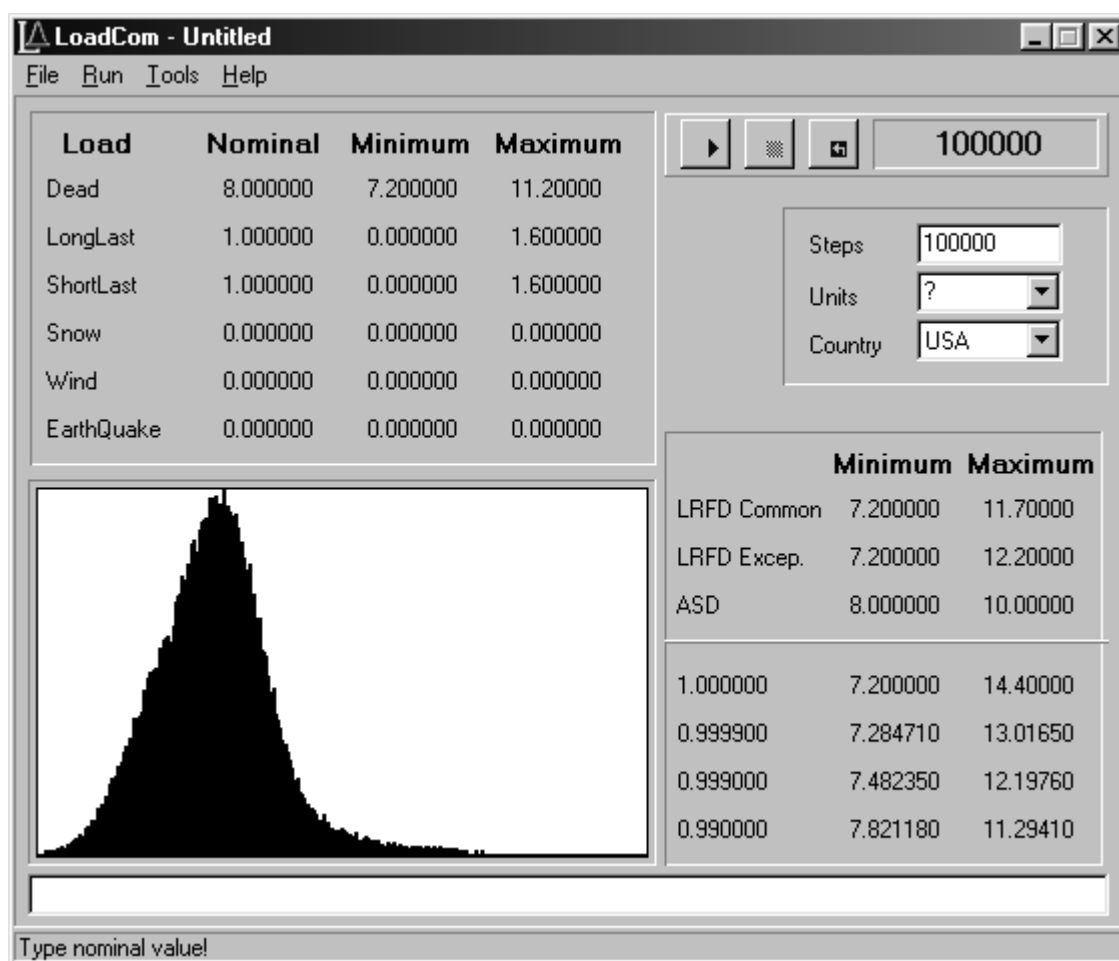


Obr. C.2.4: Rozdělení SNOW3

Zatížení větrem WL pro oblasti s intenzivním větrem má symetrické rozdělení WIND1, zatížení zemětřesením EQ má symetrické rozdělení EARTH. Obě rozdělení byla popsána dříve.

Velikosti jednotlivých zatížení jsou zadávány jako nominální hodnoty. V závislosti na zvolené metodě výpočtu a použité normě jsou aplikovány předepsané koeficienty a vypočítány extrémní hodnoty vstupních veličin. Výstupem výpočtu konvenčními metodami jsou číselné hodnoty kombinací, určené podle zvolených norem. Při výpočtu metodou SBRA je proveden zadaný počet simulačních kroků, vytvořen a zobrazen histogram výsledné kombinace spolu s maximální a minimální hodnotou, získanou v průběhu simulací. Tyto hodnoty jsou označeny 100%. Pro tři zadané pravděpodobnosti jsou určeny příslušné kvantily – hodnoty kombinací, které nejsou se zadanou pravděpodobností překročeny. Pro usnadnění porovnání výsledků získaných různými postupy umožňuje program zadání fyzikálních jednotek pro použité veličiny a jejich vzájemnou konverzi.

Program LoadCom byl vytvořen pro operační systém MS-DOS, viz obrázek C.2.1. Později byla vytvořena i 32-bitová verze pro MS-Windows, viz obrázek C.2.5.



Obr. C.2.5: LoadCom pro MS-Windows

Parametrická studie – kombinace zatížení podle různých norem

Následující příklad ukazuje výpočet kombinace zatížení. Při použití postupů výpočtu podle různých norem se při stejných nominálních hodnotách zatížení výsledky liší. Parametrická studie porovnává výsledky získané následujícími postupy:

- deterministický postup podle Allowable Stress Design, ASD [2]
- polopravděpodobnostní postup metodou částečných součinitelů, LRFD [1]
- pravděpodobnostní postup metodou SBRA pro pravděpodobnost 0,9999
- pravděpodobnostní postup metodou SBRA pro pravděpodobnost 0,999

Jsou porovnávány osově účinky zatížení na ocelový prut namáhaný v tahu, nominální účinky jednotlivých zatížení jsou při použití všech výpočetních postupů shodné. Při výpočtu je použito šest základních typů zatížení: stálé zatížení DL , dlouhodobé nahodilé zatížení LL , krátkodobé nahodilé zatížení SL , zatížení sněhem SN , zatížení větrem WL a zatížení zemětřesením EQ . Aby bylo možné porovnávat výsledky získané metodou dovolených namáhání podle normy ASD [1], jsou návrhové hodnoty účinků zatížení podle ASD násobeny korekčním koeficientem [54]

$$\kappa = \gamma_{SF} \gamma_{RF} = 1,65 \times 0,9 = 1,485 \quad /C.2.1/$$

Všechna zatížení jsou charakterizována extrémní hodnotou (maximální intenzitou) a odpovídajícím rozdělením, např.

$$DL = DL_{max} DL_{var} \quad /C.2.2/$$

V souladu s postupem návrhu metodou částečných součinitelů LRFD [2], jsou maximální intenzity účinků zatížení vyjádřeny součinem činitele zatížení a nominální či charakteristické (normové) hodnoty účinků, např.

$$DL_{max} = \gamma_{DL} DL_{nom} \quad /C.2.3/$$

Definice účinků jednotlivých zatížení shrnuje následující tabulka C.2.1.

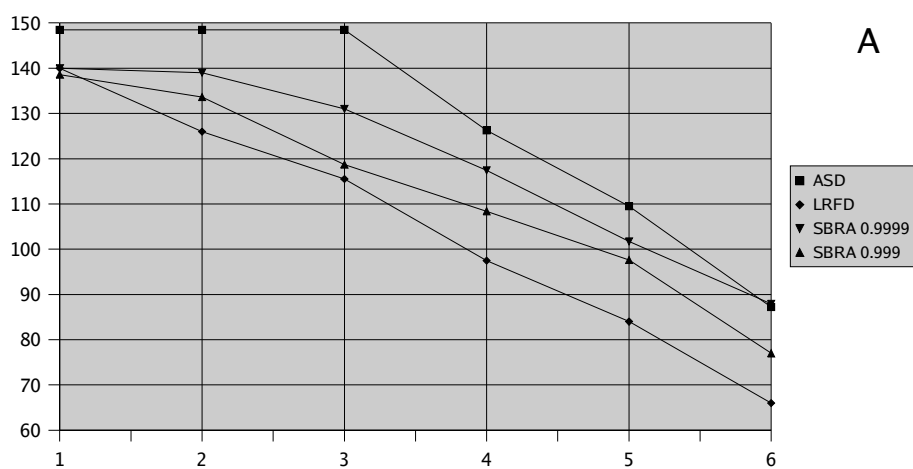
Zatížení	Nominální účinky zatížení	Součinitel zatížení	Extrémní účinky zatížení	Proměnné účinky zatížení
Stálé	DL_{nom}	1,4	$1,4 * DL_{nom}$	$1,4 * DL_{nom} * DL_{var}$
Dlouhodobé	LL_{nom}	1,6	$1,6 * LL_{nom}$	$1,6 * LL_{nom} * LL_{var}$
Krátkodobé	SL_{nom}	1,6	$1,6 * SL_{nom}$	$1,6 * SL_{nom} * SL_{var}$
Sníh	SN_{nom}	1,6	$1,6 * SN_{nom}$	$1,6 * SN_{nom} * SN_{var}$
Vítr	WL_{nom}	1,3	$1,3 * WL_{nom}$	$1,3 * WL_{nom} * WL_{var}$
Zemětřesení	EQ_{nom}	1,0	$1,0 * EQ_{nom}$	$1,0 * EQ_{nom} * EQ_{var}$

Tab C.2.1: Definice účinků zatížení

Několik ukávek vyšetřovaných kombinací zatížení, umožňujících porovnání výsledků získaných odlišnými postupy, je uvedeno v následujících tabulkách a grafech. Celkové výsledky provedené parametrické studie lze nalézt v [54]. Účinky zatížení jsou uvedeny v kN.

A	1	2	3	4	5	6
Stálé	100.0	85.0	70.0	55.0	40.0	25.0
Dlouhodobé	0.0	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0
Krátkodobé	0.0	0.0	15.0	15.0	15.0	15.0
Sníh	0.0	0.0	0.0	15.0	15.0	15.0
Vítr	0.0	0.0	0.0	0.0	15.0	15.0
Zemětřesení	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	15.0

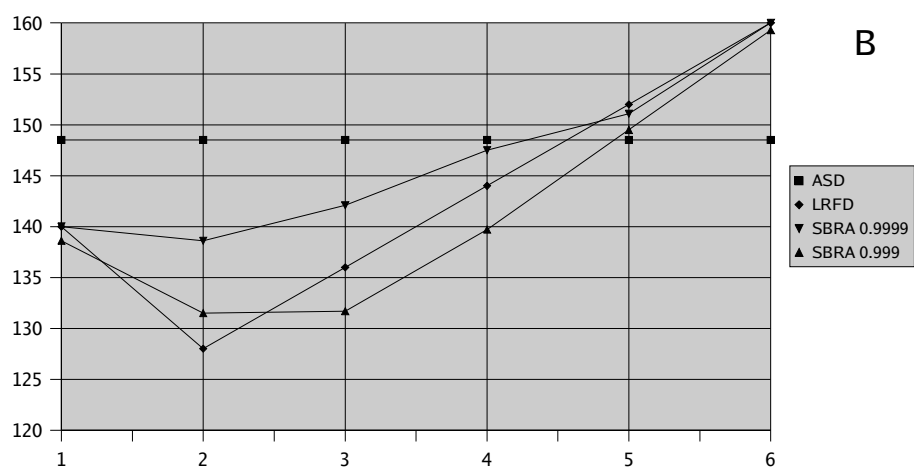
A	1	2	3	4	5	6
ASD	148.5	148.5	148.5	126.3	109.5	87.2
LRFD	140.0	126.0	115.5	97.5	84.0	66.0
SBRA 0,9999	140.0	139.0	131.0	117.4	101.7	87.9
SBRA 0,999	138.6	133.6	118.7	108.4	97.6	77.0



Tab C.2.2: Kombinace účinků zatížení, A

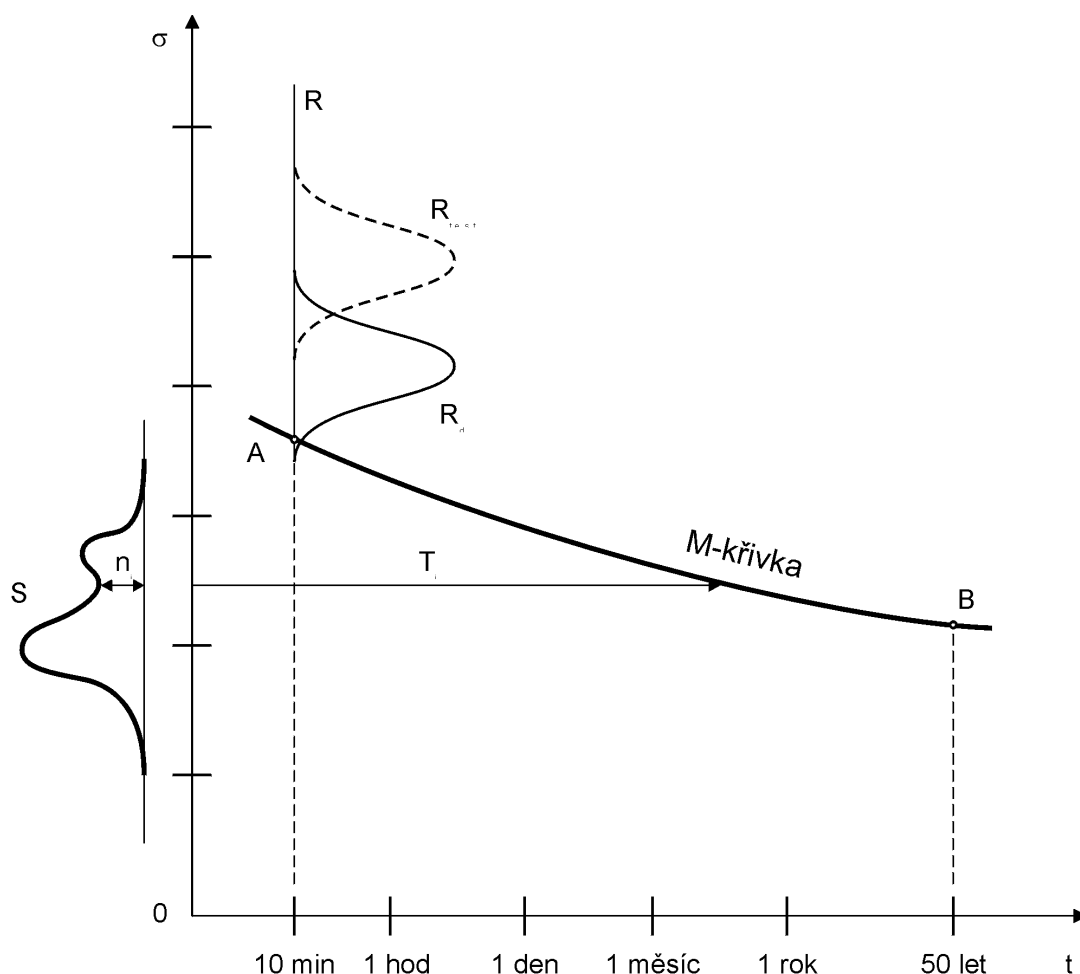
B	1	2	3	4	5	6
Stálé	100.0	80.0	60.0	40.0	20.0	0.0
Dlouhodobé	0.0	20.0	40.0	60.0	80.0	100.0
Krátkodobé	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Sníh	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Vítr	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Zemětřesení	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

B	1	2	3	4	5	6
ASD	148.5	148.5	148.5	148.5	148.5	148.5
LRFD	140.0	128.0	136.0	144.0	152.0	160.0
SBRA 0,9999	140.0	138.6	142.1	147.5	151.1	160.0
SBRA 0,999	138.6	131.5	131.7	139.7	149.5	159.3



Tab C.2.3: Kombinace účinků zatížení, B

Při návrhu konstrukcí lze použít jak deterministických postupů, používajících koeficientů bezpečnosti, tak i postupů založených na koncepci mezních stavů, kdy je mnohorozměrný prostor interakcí vstupních náhodných veličin rozdělen na bezpečnou oblast a oblast poruchy. Závislost odolnosti materiálu na průběhu zatížení, kterou v případě materiálů jako je dřevo nelze zanedbat, působí při aplikaci polopravděpodobnostních metod obtíže, neboť tyto metody předpokládají statistickou nezávislost účinků zatížení a odolnosti [48]. Metoda SBRA nabízí alternativní koncept, založený na použití simulační techniky pro určení kombinace zatížení a aplikaci M-křivek pro určení doby do poruchy dřevěných konstrukcí. Vyjádření doby trvání zatížení do porušení dřevěného prvku M-křivkami (Madisonskými křivkami) navrhl L. L. Wood z Forest Product Laboratory v Madisonu v roce 1947 [86].



Obr. C.3.1 Akumulace poškození

Pro výpočet akumulace poškození dřevěných konstrukcí byl vytvořen program DamAc (Damage Accumulation). Program umožňuje určení kombinace až šestnácti různých, vzájemně statisticky nezávislých zatížení, charakterizovaných nejvyšší extrémní hodnotou (maximální intenzitou) a rozdělením odpovídající náhodné složky, aproximovaným diskrétním rozdělením. Program DamAc určí pro 50 let života konstrukce simulací Monte Carlo 54750 hodnot kombinací účinků zatížení, při čemž

každá kombinace představuje působení zatížení po dobu 8 hodin. Z těchto hodnot je vytvořen histogram s 256 třídami, reprezentující empirickou funkci hustoty pravděpodobnosti výsledných účinků. Z funkce hustoty lze určit extrémní hodnoty účinků pro zadanou pravděpodobnost jako hodnotu kvantilu (Q_{max} : $P[Q \leq Q_{max}] = p_Q$). Pro další výpočet jsou použity pouze hodnoty ve třídách odpovídajících zadané pravděpodobnosti.

Pro každou třídu je určena doby do poruchy, udávající za jak dlouhou dobu dojde k poruše při působení konstantního zatížení. Tuto dobu lze určit pomocí M-křivky (viz obrázek C.3.1), poprvé popsané v [86]. Křivka R_t udává rozdělení hodnot ohybových sil, získané na základě laboratorních zkoušek. Křivka R_d je rozdělení návrhových hodnot ohybových sil, získané z rozdělení R_t aplikací součinitele γ_M . Bod A na M-křivce reprezentuje hodnotu ohybových sil pro dobu do poruchy T , použitou při laboratorních zkouškách, nejčastěji 5 nebo 10 minut. Bod B reprezentuje hodnotu ohybových sil pro dobu do poruchy $T = 50$ let, což je obvykle předpokládaná doba života konstrukce. Rovnice M-křivky je podle [86]

$$T_f = \frac{1}{A(\sigma - \sigma_0)^B} \quad /C.3.1/$$

T_f je doby do poruchy při působení konstantního zatížení σ . A , B a σ_0 jsou parametry modelu.

Akumulované poškození je stanoveno pomocí sumarizace "částečných poškození"

$$\frac{t_i}{T_i}, \text{ odpovídajících jednotlivým úrovním napětí. M-křivka určuje doby do poruchy } T_i$$

pro každou třídu i . Podle Palmgren-Minerova pravidla [79] musí být pro bezpečnou oblast

$$\sum_i \frac{n_i}{T_i} \leq 1,0 \quad /C.3.2/$$

kde n_i jsou četnosti v jednotlivých třídách, vyjadřující trvání jednotlivých úrovní zatížení t_i ($t_i = 8n_i$ [min]) a T_i jsou doby do poruchy pro jednotlivé třídy. Sumace je prováděna pouze pro třídy, odpovídající zadané pravděpodobnosti.

Akumulace poškození dřevěného prvku

Dřevěný prvek je vystaven kombinaci účinků zatížení, jimiž jsou v tomto případě ohybová napětí vyvozená jednotlivými zatíženími. Akumulace poškození je modelována Madisonovou křivkou podle vztahu /C.3.1/ s parametry $A = 1,1 \times 10^{-46}$, $B = 12,35$ a $\sigma_0 = 1166$. Pro konstantní hodnotu účinků zatížení $L_{konst} = 3530$ psi (pound per square inch) lze určit dobu do selhání vyjádřenou ve dnech

$$T_f = \frac{1}{A(\sigma - \sigma_0)^B} = \frac{1}{1,1 \times 10^{-46} \times (3530 - 1166)^{12,35}} = 19681 \quad /C.3.3/$$

Akumulované poškození po 50 letech předpokládané životnosti konstrukce je

$$D = \frac{50 \times 365,25}{19681} = 0,928 \quad /C.3.4/$$

V případě kombinace zatížení je

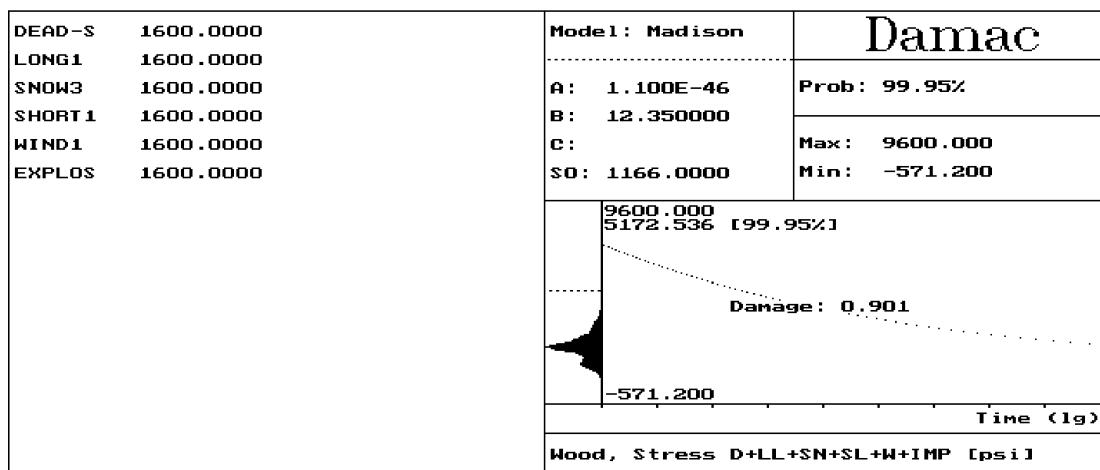
$$L = DL + SL + LL + WL + SN + IL \quad /C.3.5/$$

kde L je výsledná kombinace zatížení, DL je stálé zatížení, SL je krátkodobé nahodilé zatížení, LL je dlouhodobé nahodilé zatížení, WL je zatížení větrem, SN je zatížení sněhem, IL je impulsní zatížení výbuchem. Všechna zatížení mají shodnou extrémní hodnotou maximální intenzity 1600 psi a následující rozdělení: DEAD-S, SHORT1, LONG1, WIND1, SNOW3 a EXPLOS. Rozdělení EXPLOS (viz obrázek C.3.2), je definované na intervalu [0,0, 1,0]. Ostatní rozdělení jsou popsána v kapitolách C.1 a C.2.



Obr. C.3.2: Rozdělení EXPLOS

Simulačním výpočtem pomocí programu DamAc byla pro pravděpodobnost 0,9995 určena hodnota akumulace poškození 0,901, viz obrázek C.3.3.



Obr. C.3.3: Akumulace poškození dřevěného prvku

V obou případech je vypočtené akumulované poškození (0,928 a 0,901) menší než jedna a nedojde tedy k selhání konstrukce. Srovnáním extrémních hodnot (3530 psi v konstantního zatížení a 9600 psi v případě kombinace zatížení) lze pozorovat vliv kombinace zatížení na výsledné akumulované poškození.

MatCom

Program MatCom (Material Combination) slouží pro pravděpodobnostní výpočet odolnosti složených prvků simulační technikou metodou SBRA. Program umožňuje určení odolnosti prvků složených z několika částí vyrobených z různých materiálů. V případě ocelových prvků je každá část charakterizována velikostí průřezové plochy A_i a hodnotou meze kluzu použitého materiálu Fy_i .

$$R = \sum_{i=1}^n A_i Fy_i \quad /C.4.1/$$

Průřezová plocha je určena nominální hodnotou A_{nom} a rozdělením náhodné veličiny A_{var} : $A_i = A_{nom\ i} A_{var\ i}$. Veličina A_{var} má normální rozdělení. Program obsahuje databázi rozdělení meze kluzu základních druhů oceli. Všechna rozdělení jsou aproximována diskrétním rozdělením, všechny veličiny jsou považovány za nezávislé. Simulací Monte Carlo je vytvořen histogram celkové odolnosti, jenž je použit jako empirická funkce hustoty pravděpodobnosti. Z této funkce hustoty lze kromě absolutních extrémních hodnot (minima a maxima) určit i extrémní hodnoty, které nebudou překročeny se zadanou pravděpodobností. Normováním výsledné odolnosti velikostí celkové nominální plochy je určena výsledná mez kluzu složeného prvku

$$Fy = \frac{R}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i Fy_i}{\sum_{i=1}^n A_{nom\ i}} \quad /C.4.1/$$

Maximální hodnoty Fy_{max} jsou pro zadanou pravděpodobnost p určeny jako hodnoty kvantilů ($Fy_{max} : P[Fy \leq Fy_{max}] = p$). Minimální hodnoty Fy_{min} jsou pro zadanou pravděpodobnost p určeny jako hodnoty kvantilů ($Fy_{min} : P[Fy \geq Fy_{min}] = p$). Minimální hodnoty reprezentují mez kluzu zaručenou se zvolenou pravděpodobností.

Odolnost složeného prvku

Následující příklad ukazuje závislost odolnosti složeného prvku na počtu jeho částí. Odolnost jednoduchého prvku, vyjádřená jako návrhová pevnost, závisí na průřezové ploše a mezi kluzu materiálu

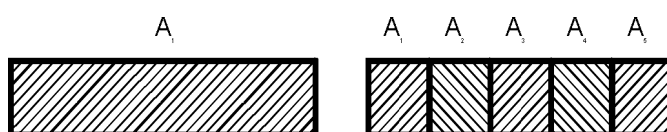
$$R = A Fy \quad /C.4.2/$$

Odolnost složeného prvku je součtem odolností všech jeho částí, viz /C.4.1/. V tomto příkladě jsou porovnávány prvky složené z $n = 1, \dots, 5$ částí. Všechny části jsou vyrobeny z téhož materiálu $Fy_1 = Fy_2 = \dots = Fy_n$, mají stejnou průřezovou plochu

$A_1 = A_2 = \dots = A_n$, tedy celková průřezová plocha je ve všech případech stejná

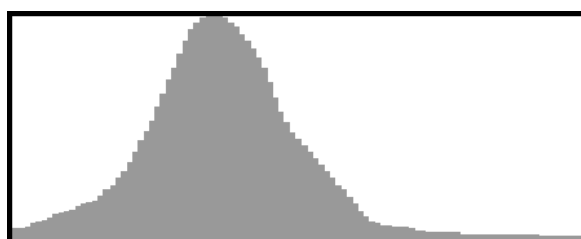
$A = \sum_{i=1}^n A_i$, viz obrázek C.4.1. Rozdělení průřezové plochy je ve všech případech

$N(1, 0,017)$ omezené na interval $[0,95, 1,05]$ ($\pm 5 \%$). Toto rozdělení je reprezentováno histogramem N1-05.



Obr. C.4.1: Jednoduchý a složený prvek

Mez kluzu F_y pro použitou ocel typu A36 má rozdělení A36 z databáze materiálových vlastností, viz obrázek C.4.2. Toto rozdělení bylo získáno na základě testování vlastností uvedené oceli, používané v USA. Jeho extrémní hodnoty jsou 36 ksi a 50 ksi (kilopound per square inch).



Obr. C.4.2: Rozdělení A36

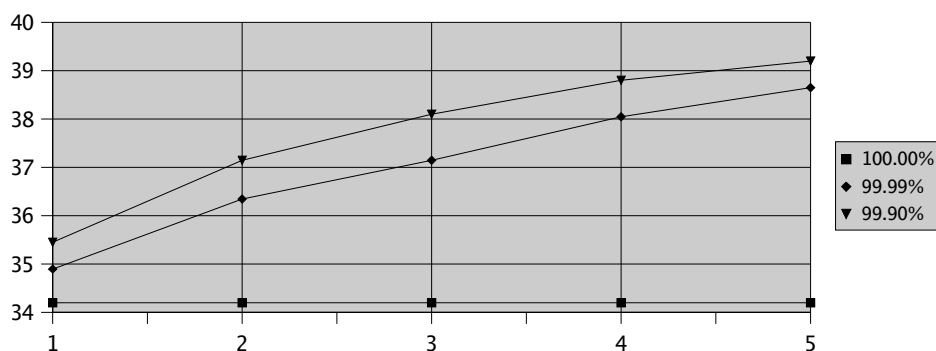
Výsledné hodnoty odolnosti, určené pro jednotlivé případy simulací s 50 000 kroků programem MatCom (viz obrázek C.4.3) pro pravděpodobnosti 1,0, 0,9999 a 0,999, jsou shrnuty v tabulce C.4.1 a graficky znázorněny na obrázku C.4.3.

Dist:	Area:	-%	+%	Grade:	Product:	Width:	MATCOM Number of steps: 50000 Maximum [99.99%] 47.800000 Minimum [99.99%] 38.650000 Maximum [99.90%] 46.800000 Minimum [99.90%] 39.200000
Normal	12.00	5.000	5.000	A36	36	5.000	
Normal	12.00	5.000	5.000	A36	36	5.000	
Normal	12.00	5.000	5.000	A36	36	5.000	
Normal	12.00	5.000	5.000	A36	36	5.000	

Obr. C.4.3: Program MatCom

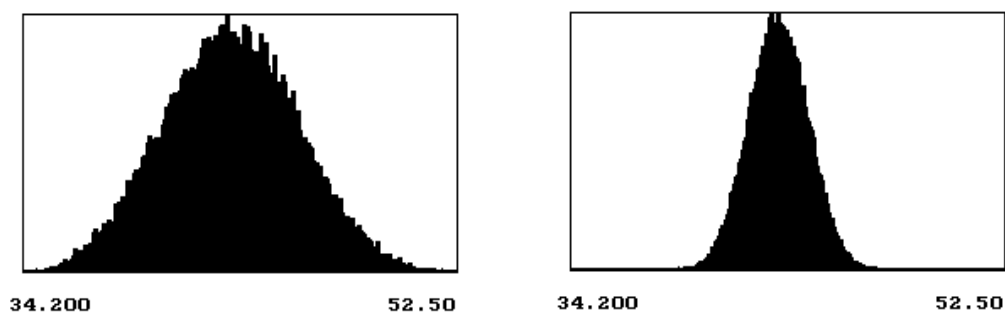
	100.00%	99.99%	99.90%
1	34.20	34.90	35.45
2	34.20	36.35	37.15
3	34.20	37.15	38.10
4	34.20	38.05	38.80
5	34.20	38.65	39.20

Tab. C.4.1: Odolnost složeného prvku



Obr. C.4.4: Odolnost složeného prvku

Pro zvolenou úroveň pravděpodobnosti má složený prvek větší odolnost ve srovnání s homogenním prvkem téhož průřezu. To je způsobeno nízkou pravděpodobností kombinace prvků s nepříznivými vlastnostmi. Rozdělení odolnosti složeného prvku má ve srovnání s rozdělením odolnosti homogenního prvku nižší rozptyl při shodné střední hodnotě. S počtem částí složeného prvku rozptyl klesá a tím roste odolnost pro zvolenou pravděpodobnost. Tomu odpovídají i tvary funkce hustoty pravděpodobnosti odolnosti pro jednotlivé případy. Nárůst odolnosti je v případě prvku složeného z pěti částí větší než 10%. Empirické funkce hustoty pro homogenní prvek a prvek složený z pěti částí jsou znázorněny na obrázku C.4.5.



Obr. C.4.5: Odolnost prvku složeného z 1 a 5 stejných částí.

M-Star

M-Star je program umožňující řešit úlohy, při nichž hledáme rozdělení náhodné veličiny, vyjádřené ve tvaru $Y = M(X)$, kde X je vektor vstupních náhodných veličin a Y je výstupní veličina. Na základě známých rozdělení náhodných veličin X_i , je simulačním postupem metodou Monte Carlo programem M-Star vytvořena empirická funkce hustoty pravděpodobnosti výstupní náhodné veličiny ve formě histogramu a vypočítány základní statistiky. Program umožňuje určovat také hodnoty kvantilů a odpovídajících pravděpodobností, což je typická úloha při určování spolehlivosti metodou SBRA v případech, kdy pro spolehlivostní funkci RF situace $RF < 0$ reprezentuje selhání. Pravděpodobnost selhání lze pak určit z histogramu veličiny RF jako $p_f = P[RF < 0]$. Funkce M (matematický model, popisující řešenou úlohu), je zadána ve formě běžného algebraického zápisu v explicitním tvaru. Rozdělení vstupních veličin jsou aproximována obecným diskrétním rozdělením. V každém simulačním kroku jsou vygenerovány realizace vstupních veličin X_i a pro vygenerované hodnoty je funkce M vyhodnocena. Po vyhodnocení modelu je zaznamenána výsledná hodnota výstupní veličiny. Generování hodnot vstupních veličin, vyhodnocování modelu a záznam hodnot výstupní veličiny je opakováno. Po ukončení zadaného počtu simulačních kroků je zobrazen výsledný histogram a vypočítány statistiky, pravděpodobnosti a kvantily.

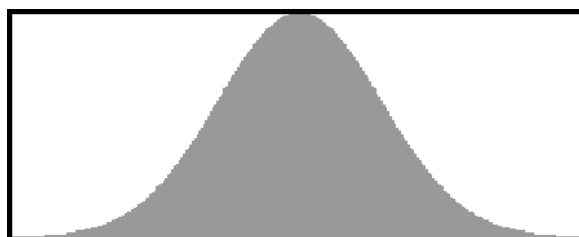
Pravděpodobnost selhání ocelového prvku

Předmětem výpočtu je ocelový prut, vyrobený z oceli A36, vystavený namáhání tahem.

Odolnost ocelového prutu lze vyjádřit jako

$$R = 0,9 A_{nom} A_{var} F_y \quad /C.5.1/$$

kde průřezová plocha prutu je vyjádřena jako součin nominální plochy A_{nom} a její náhodné složky A_{var} , způsobené tolerancemi při výrobě. Nominální plocha $A_{nom} = 778,0 \text{ mm}^2$. Proměnná A_{var} má v tomto případě normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 1,0$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,033$. Rozdělení je omezeno na rozsah hodnot $[0,9, 1,1]$ ($\pm 10 \%$). Toto rozdělení je reprezentováno histogramem AREA-S.



Obr. C.5.1: Rozdělení AREA-S

Mez kluzu F_y má rozdělení A36-M z databáze materiálových vlastností, viz obrázek C.4.1. Toto rozdělení bylo získáno na základě testování vlastností použité oceli. Vztah mezi skutečným chováním použitého prvku a výsledky konvenčních testů vyjadřuje koeficient 0,9 [54].

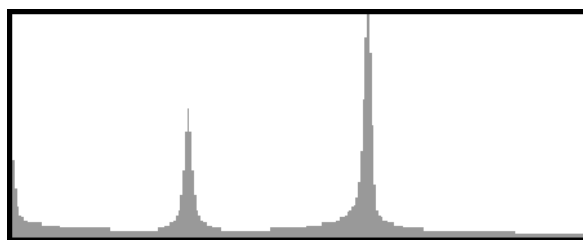
Účinky zatížení S v tomto příkladě odpovídají kombinaci tří osových sil a jsou vyjádřeny jako

$$S = DL + LL + SL \quad /C.5.2/$$

kde DL je stálé zatížení, LL dlouhodobé nahodilé zatížení a SL zatížení sněhem. Všechna zatížení jsou charakterizována konstantními nominálními hodnotami a odpovídajícími rozděleními. Výsledné rozdělení účinků zatížení S lze určit z následujícího vztahu

$$S = DL_{nom} DL_{var} + LL_{nom} LL_{var} + SL_{nom} SL_{var} \quad /C.5.3/$$

Nominální hodnoty zatížení jsou $DL_{nom} = 90$ kN, $LL_{nom} = 90$ kN a $SL_{nom} = 60$ kN. Stálé zatížení má rozdělení DEAD1, popsané v kapitole C.1. Dlouhodobé nahodilé zatížení má trimodální rozdělení LONG2, viz obrázek C.5.2.



Obr. C.5.2: Rozdělení LONG2

Zatížení sněhem má rozdělení SNOW3, platné pro oblasti se šestiměsíčním sněhem, popsané v kapitole C.2.

Předpokládá se statistická nezávislost všech náhodných veličin.

Pro určení spolehlivosti konstrukce je použita spolehlivostní funkce RF , rozdělující možné interakce mezi odolností R a účinky zatížení S na situace bezpečné a situace v nichž dochází k selhání. Spolehlivostní funkce je definována

$$RF = R - S \quad /C.5.4/$$

Situace kdy $R < S$ reprezentují selhání konstrukce, situace kdy $R > S$ jsou bezpečné.

Za předpokladu náhodného charakteru alespoň jedné z veličin R nebo S je také RF náhodná veličina. Pravděpodobnost selhání konstrukce $p_f = P[R < S]$ lze určit z rozdělení veličiny RF . Pokud jsou všechny náhodné veličiny určující R a S známé nebo mohou být aproximovány, lze rozdělení určit simulační technikou s využitím metody Monte Carlo. Na obrázku C.5.3 je znázorněna empirická funkce hustoty pravděpodobnosti veličiny RF , vypočtené statistiky a pravděpodobnost selhání $p_f = P[RF < 0] = 0.0007$.



Obr. C.5.3: Výpočet pravděpodobnosti selhání programem M-Star

Anthill

Program Anthill umožňuje metodou SBRA řešit úlohy popsané matematickým modelem a spolehlivostní funkcí. Model je vyjádřen ve tvaru $Y = M(X)$, kde X je vektor vstupních náhodných veličin a Y je vektor výstupních veličin. Spolehlivostní funkce má tvar $RF = G(Y)$ nebo $RF = G(Y, q)$, kde q je hledaný parametr, viz 5.4. Funkce M (matematický model, popisující řešenou úlohu) i G (spolehlivostní funkce) jsou zadány ve formě běžného algebraického zápisu v explicitním tvaru, umožňující jejich přímé vyčíslení. Rozdělení vstupních veličin X_i jsou aproximována obecnými diskrétními rozděleními. V každém simulačním kroku jsou vygenerovány realizace vstupních veličin X_i , pro vygenerované hodnoty je vyhodnocena funkce $M(X)$ a hodnoty výstupních veličin Y_i jsou zaznamenány. Generování hodnot vstupního vektoru, vyhodnocování modelu a záznam hodnot výstupního vektoru je opakováno. Po ukončení zadaného počtu simulačních kroků n je zobrazena množina zaznamenaných vektorů Y (m -tic hodnot) jako dvojrozměrný obraz průmětu bodů o souřadnicích $[y_1, \dots, y_m]$ do zvolené roviny (*mraveniště – anthill*). Dále je pro zaznamenané vektory Y vyhodnocována spolehlivostní funkce. Pokud má spolehlivostní funkce tvar $RF = G(Y)$, je určena pravděpodobnost platnosti relace $RF < 0$. Pro každý zaznamenaný vektor výstupních veličin vypočtena hodnota spolehlivostní funkce $G(Y)$ a odhad hledané pravděpodobnosti

je nakonec určen jako $p_f = P[RF < 0] \approx \frac{n_{RF < 0}}{n}$, kde $n_{RF < 0}$ je počet vektorů, pro něž

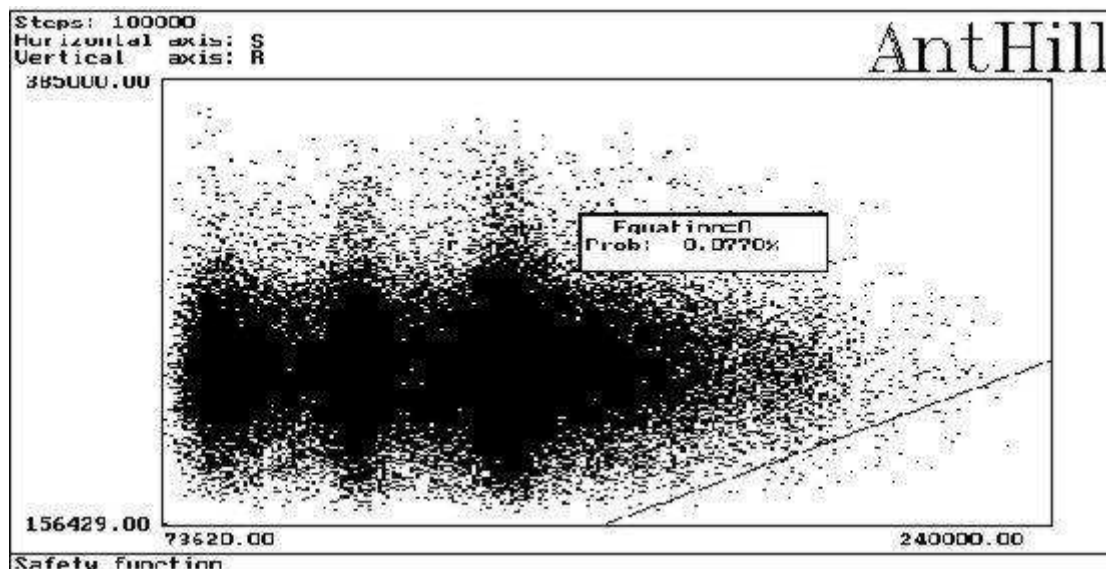
platí relace $RF < 0$ a n je celkový počet provedených simulačních kroků. Pokud má spolehlivostní funkce tvar $RF = G(Y, q)$, je q parametr, jehož hodnota se hledá iteračním postupem tak, aby relace $RF < 0$ byla splněna pro zadanou pravděpodobnost p_f . Pravděpodobnost p_f , určená uvedeným postupem obvykle v metodě SBRA reprezentuje pravděpodobnost selhání.

Pravděpodobnost selhání ocelového prvku

V následujícím příkladě je pro výpočet pravděpodobnosti selhání ocelového prutu vystaveného namáhání v tahu použit program Anthill. Zadání je stejné jako v předchozím příkladě, řešeném pomocí programu M-Star.

Tvar histogramu získaného při řešení příkladu C.5.1 pro veličinu neukazuje žádné informace o rozděleních veličin R a S ani o jejich interakcích. Program Anthill zaznamenává všechny vygenerované páry hodnot veličin R a S a po skončení simulací lze tyto páry zobrazit jako množinu bodů v rovině. Každý bod reprezentuje jednu

z možných interakcí veličin R a S . Hraniční přímka $RF = R - S = 0$, daná spolehlivostní funkcí, rozděluje rovinu na bezpečnou oblast a oblast selhání. Pravděpodobnost poruchy lze určit jako poměr počtu bodů v oblasti selhání a celkového počtu bodů (simulačních kroků).



Obr. C.6.1: Výpočet pravděpodobnosti selhání programem Anthill pro MS-DOS

Situace po provedení 100 000 simulačních kroků je znázorněna na obrázku C.6.1. Většina vygenerovaných bodů leží v bezpečné oblasti nad přímkou $R - S = 0$, body reprezentující páry hodnot R a S odpovídající selhání leží pod přímkou $R - S = 0$. Poměr počtu bodů v oblasti selhání a celkového počtu bodů vyjadřuje pravděpodobnost selhání $p_f = P[R < S]$, která je v tomto případě $p_f = 0,00077$ (0,077%). Dvojměrný graf podává vizuální informaci o rozdělení veličin R a S stejně jako o jejich interakcích.

Anthill pro Windows

Program Anthill pro Windows vznikl spojením a rozšířením vlastností programů M-Star a Anthill pro MS-DOS. Program umožňuje metodou SBRA řešit úlohy popsané matematickým modelem a spolehlivostní funkcí. Model je vyjádřen ve tvaru $Y = M(X)$, kde X je vektor vstupních náhodných veličin a Y je vektor výstupních veličin. Spolehlivostní funkce má tvar $RF = G(Y)$ nebo $RF = G(Y, q)$. Funkce M (matematický model, popisující řešenou úlohu) i G (spolehlivostní funkce) jsou zadány ve formě běžného algebraického zápisu v explicitním tvaru, umožňující jejich přímé vyčíslení. Rozdělení vstupních veličin X_i jsou aproximována obecnými diskrétními nebo po částech rovnoměrnými rozděleními, případně je možné použít některé z běžných rozdělení, zadaných hodnotami parametrů. V každém simulačním kroku jsou vygenerovány realizace vstupních veličin X_i , pro vygenerované hodnoty je vyhodnocena funkce $M(X)$ a hodnoty vybraných výstupních veličin Y_i jsou zaznamenány v některé z vybraných forem – jako numerické hodnoty, histogram nebo záznam. Generování hodnot vstupního vektoru, vyhodnocování modelu a záznam hodnot výstupního vektoru je opakováno. Po provedení zadaného počtu simulačních kroků jsou zobrazovány vybrané

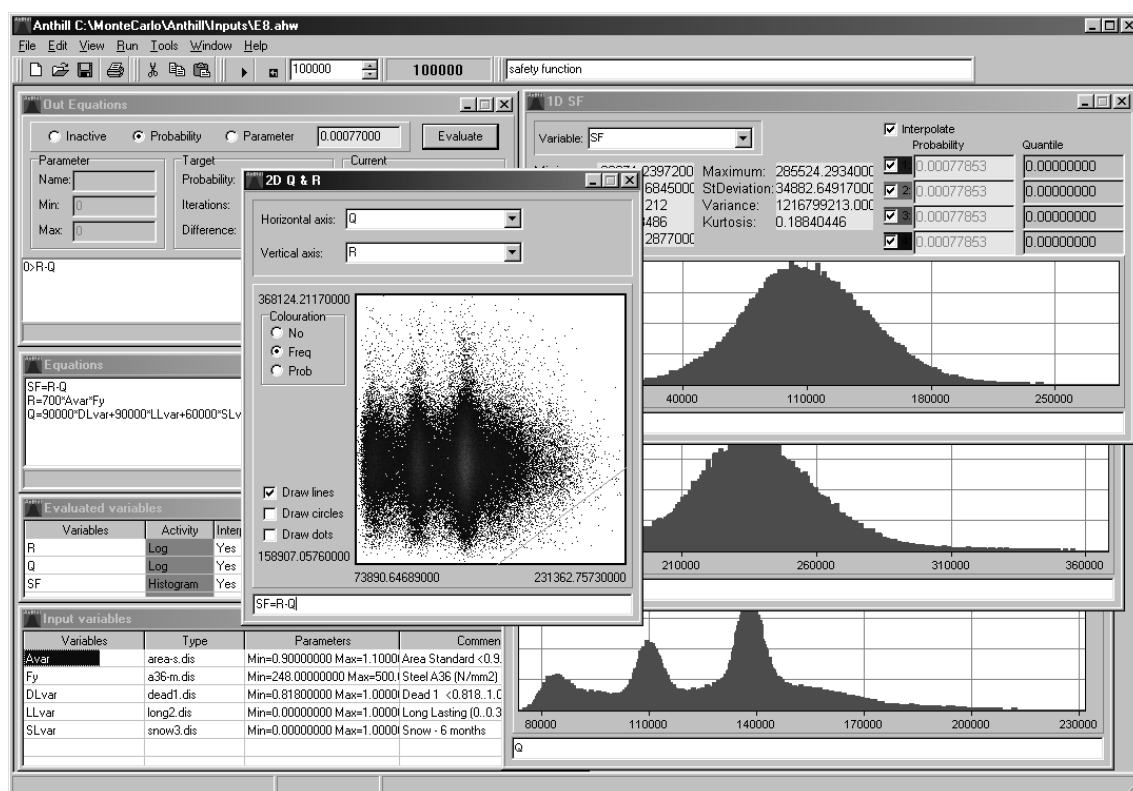
mezivýsledky. Po ukončení celkového počtu simulačních kroků n jsou zobrazeny výsledné statistiky, empirické funkce hustoty pravděpodobnosti (histogramy), pravděpodobnosti, kvantily a dvojrozměrné grafy. Dále je pro zaznamenané vektory Y vyhodnocována spolehlivostní funkce. Pokud má spolehlivostní funkce tvar $RF \# G(Y)$, kde $\#$ je symbol relace ($<$, $>$ a pod.), je určena pravděpodobnost platnosti relace $RF \# 0$. Pro každý zaznamenaný vektor výstupních veličin je vypočtena hodnota spolehlivostní funkce $G(Y)$ a odhad hledané pravděpodobnosti je nakonec určen jako

$$p_f = P[RF \# 0] \approx \frac{n_{RF \# 0}}{n}, \text{ kde } n_{RF \# 0} \text{ je počet vektorů, pro něž platí relace } RF \# 0 \text{ a } n$$

je celkový počet provedených simulačních kroků. Pokud má spolehlivostní funkce tvar $RF \# G(Y, q)$, je q parametr, jehož hodnota se hledá iteračním postupem tak, aby relace $RF \# 0$ byla splněna pro zadanou pravděpodobnost p_f . Podrobně je program Anthill pro Windows popsán v kapitole 5.

Pravděpodobnost selhání ocelového prvku

V následujícím příkladě je pro výpočet pravděpodobnosti selhání ocelového prutu vystaveného namáhání v tahu použit program Anthill pro Windows. Zadání je stejné jako v předcházejících příkladech řešených pomocí programů M-Star a Anthill pro MS-DOS.



Obr. C.7.1: Výpočet pravděpodobnosti selhání programem Anthill pro Windows

Program Anthill umožňuje stejně jako program M-Star přímé určení rozdělení veličiny RF , z něhož lze určit pravděpodobnost poruchy jako pravděpodobnost $p_f = P[RF < 0]$. Jako v programu Anthill pro MS-DOS lze také zaznamenat všechny generované páry R, S a pravděpodobnost selhání potom určit na základě počtu bodů

v oblasti selhání, definované spolehlivostní funkcí. Oba postupy výpočtu byly provedeny společně. Na obrázku C.7.1 jsou zobrazeny výsledné histogramy pro R , S a spolu s 2D grafem interakcí R a S po provedení 100 000 simulačních kroků. Pravděpodobnost selhání $p_f = P[RF < 0]$ byla určena oběma způsoby $p_f \approx 0,00077$.

Příloha D – Testování generátoru

Testování primárního generátoru

Primární generátor, použitý v SBRA programech, je lineární kongruenční generátor podle vztahu /2.4.1.2/, jehož parametry a implementace je popsána v kapitole 5.2.1. Všechny programy využívají metodu Monte Carlo pro určování rozdělení náhodných veličin popsanych jako funkce několika vstupních náhodných proměnných. Počet vstupních proměnných může v programech pro MS-DOS dosahovat několika desítek, počet simulačních kroků se obvykle pohybuje v řádu tisíců až miliónů. Program Anthill pro Windows, umožňuje použití stovek vstupních náhodných proměnných i zvýšení počtu simulačních kroků o několik řádů. Proto mezi důležité vlastnosti primárního generátoru náhodných čísel patří dostatečná délka periody. Jelikož je pro generování všech vstupních náhodných proměnných použit jeden primární generátor, je také velmi důležitá nízká seriální korelace generované posloupnosti.

Délka periody

Potřebná délka periody primárního generátoru závisí na počtu generovaných vstupních náhodných proměnných a na počtu simulačních kroků. Nejnepříznivější situace nastává, pokud je délka periody L primárního generátoru dělitelná počtem vstupních proměnných N . Pak mají jednotlivé generované posloupnosti délku periody $l = \frac{L}{N}$. Tato hodnota také udává nejvyšší možný počet simulačních kroků, při kterém nedochází k opakování generovaných posloupností.

Ze vztahu /2.4.1.2/ je zřejmé, že každá hodnota čísla X se v rámci periody posloupnosti generované použitým primárním generátorem vyskytuje pouze jednou. Délku periody lze určit jako vzdálenost mezi dvěma po sobě jdoucími výskyty libovolné hodnoty X . Pomocí jednoduchého programu bylo zjištěno, že délka periody testovaného generátoru je $l = 4\,294\,967\,296 = 2^{32}$. To při použití vzorce pro realizaci kongruenčního generátoru $x_{n+1} = (134775813x_n + 1) \bmod 2^{32}$ odpovídá maximální možné dosažitelné délce periody. Generovaná posloupnost tedy obsahuje všechny celočíselné hodnoty z intervalu $[0, 2^{32}-1]$.

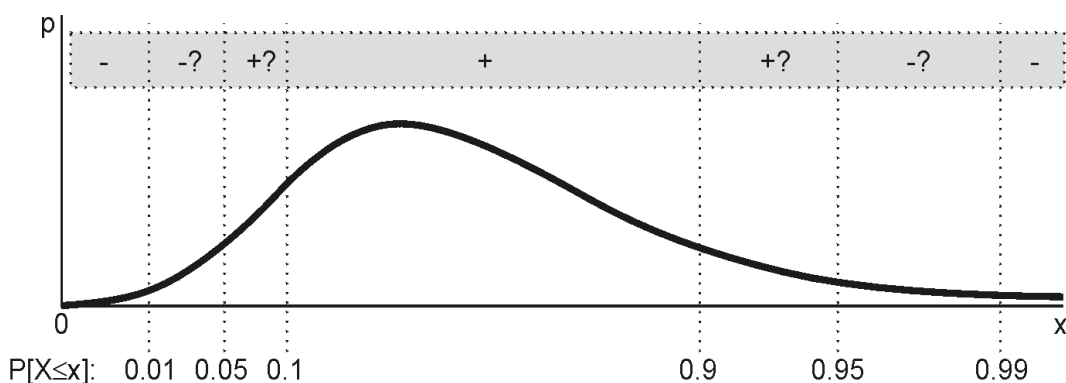
Rovnoměrnost rozdělení

Pro ověření, zda generovanou posloupnost lze považovat za posloupnost realizací získanou náhodným výběrem ze základního souboru s rovnoměrným rozdělením, byl použit χ^2 test dobré shody. Interval v němž leží hodnoty testované posloupnosti je rozdělen na k disjunktních podintervalů. Pokud je na základě teorie očekávaný počet výsledků ležících v jednotlivých intervalech e_i a skutečný počet o_i , pak má statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad /D.1/$$

pro velká k a velký počet členů testované posloupnosti n asymptoticky χ^2 -rozdělení s počtem stupňů volnosti $v = k - m - 1$, kde m je počet odhadnutých parametrů testovaného rozdělení. Pokud je vypočtená hodnota statistiky χ^2 větší než hodnota kvantilu příslušného rozdělení χ^2 pro zvolenou hladinu významnosti α , zamítáme hypotézu že testovaná posloupnost je výběrem z předpokládaného rozdělení. V některých případech je vypočtená hodnota porovnávána také s hodnotou kvantilu $1 - \alpha$. Pokud je vypočtená hodnota menší než hodnota kvantilu $1 - \alpha$, zamítáme hypotézu, že testovaná posloupnost je náhodným výběrem z předpokládaného rozdělení (odchyly hodnot jsou příliš malé, tudíž se nejedná o náhodný výběr) [76].

Obvykle používané hodnoty α jsou v rozsahu $\alpha = 0,99$ až $\alpha = 0,95$. Pro přesnější vyhodnocení výsledků testu lze použít následující postup [76]. Pokud hodnota χ^2 leží vně oblasti pravděpodobností 0,01 nebo 0,99, hypotézu zamítáme (-), pokud χ^2 leží v oblasti pravděpodobností 0,01 až 0,05 nebo 0,95 až 0,99, je zamítnutí hypotézy "dosti pravděpodobné" (-?), pokud χ^2 leží v oblasti pravděpodobností 0,5 až 0,1 nebo 0,9 až 0,95, je zamítnutí hypotézy "možné" (+?). Pro hodnoty χ^2 v oblasti pravděpodobností 0,1 až 0,9 hypotézu nezamítáme (+). Jednotlivé oblasti rozdělení χ^2 jsou vyznačeny na obrázku D.1.



Obr. D.1: Oblasti rozdělení χ^2

Pravděpodobnost zamítnutí platné hypotézy je $1 - \alpha$. Test bývá pro každé rozdělení několikrát opakován (obvykle nejméně třikrát), což umožňuje vyloučit náhodné vlivy a také rozhodnout o zamítnutí hypotézy v případech, kdy hodnota χ^2 leží ve "sporných" oblastech pravděpodobností 0,01 až 0,1 nebo 0,9 až 0,99. Pro získání věrohodných výsledků je třeba ověřit, zda četnosti v každé třídě histogramu jsou větší než 5, což je považováno za dostatečné splnění podmínek platnosti testu.

Při testování použitého primárního generátoru byly vygenerovány čtyři posloupnosti 256 000 čísel z intervalu $[0,1)$. Tento interval byl rozdělen na 256 stejných tříd a čísla z vygenerovaných posloupností byla zaříděna do těchto tříd. Očekávané četnosti v každé třídě jsou 1000. Pro jednotlivé posloupnosti byly vypočteny hodnoty χ^2 , uvedené v tabulce D.1. Počet stupňů volnosti χ^2 -rozdělení vje v případě rovnoměrného rozdělení roven $k - 1$ (počet tříd - 1), tedy pro 256 tříd je $v = 255$. Kritická hodnota rozdělení χ^2 s 255 stupni volnosti je pro 99%-ní hladinu významnosti přibližně 310,5, pro 95%-ní hladinu významnosti přibližně 293,2 a pro 90%-ní hladinu významnosti

přibližně 284,3 [44]. Pro vypočtené hodnoty χ^2 nelze proto hypotézu o výběru z rovnoměrného rozdělení zamítnout.

	χ^2	
1	244.69	+
2	267.32	+
3	250.48	+
4	244.09	+

Tab. D.1: Hodnoty χ^2 pro posloupnosti 256000 realizací jedné náhodné veličiny

Obdobným způsobem byly vygenerovány a testovány čtyři čtveřice A, B, C, D posloupností 256 000 čísel z intervalu [0,1) jako realizace čtyř nezávislých proměnných s rovnoměrným rozdělením. Tyto proměnné byly vytvořeny z primární posloupnosti tak, že pro generování první proměnné byly použity členy 1, 5, 9, 13, ..., pro druhou proměnnou členy 2, 6, 10, 14, ..., pro třetí proměnnou členy 3, 7, 11, 15, ... a pro čtvrtou proměnnou členy 4, 8, 12, 16, ... Hodnoty χ^2 vypočtené pro jednotlivé posloupnosti jsou uvedeny v tabulce D.2.

	χ^2 pro posloupnost A		χ^2 pro posloupnost B		χ^2 pro posloupnost C		χ^2 pro posloupnost D	
1	255.502	+	196.872	+	276.118	+	282.788	+
2	253.882	+	277.804	+	238.954	+	292.066	+
3	267.568	+	285.784	+	277.180	+	243.260	+
4	282.648	+	232.654	+	265.475	+	231.550	+

Tab. D.2: Hodnoty χ^2 pro posloupnosti 256000 realizací čtyř náhodných veličin

Kritické hodnoty tohoto rozdělení jsou pro 99%, 95% a 90%-ní hladinu významnosti opět přibližně 310,5, 293,2 a 284,3. Z vypočtených hodnot χ^2 vyplývá, že hypotézu o výběru z rovnoměrného rozdělení nelze zamítnout pro žádnou z posloupností A, B, C a D.

Seriální korelace

Protože všechny vstupní náhodné posloupnosti, odpovídající jednotlivým vstupním náhodným proměnným, jsou generovány pomocí jednoho primárního náhodného generátoru, ovlivňuje závislost mezi jednotlivými prvky primární posloupnosti nejen vlastnosti všech generovaných posloupností, ale i vzájemnou statistickou závislost jednotlivých vstupních náhodných proměnných.

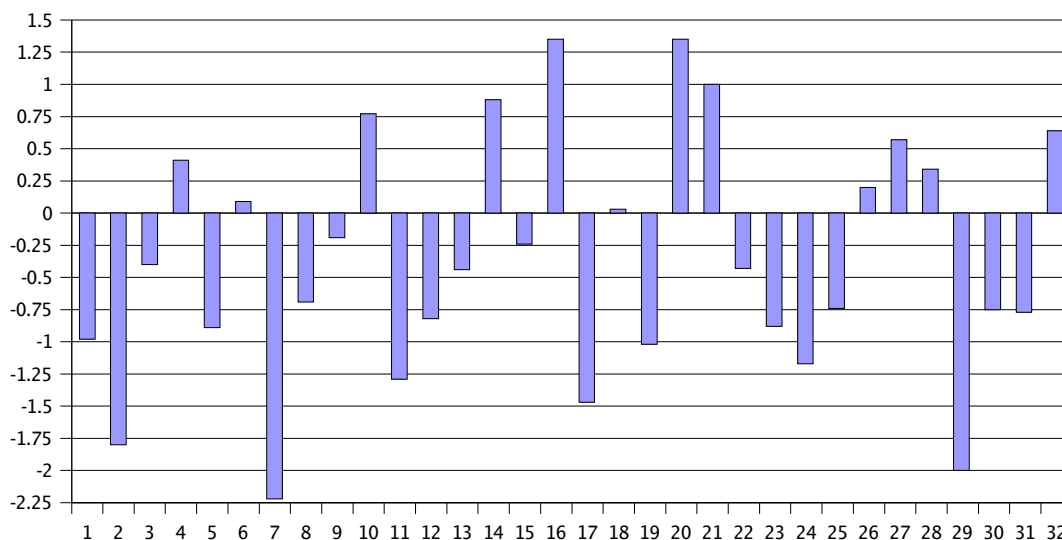
Pro posouzení závislosti mezi členy posloupnosti byl použit koeficient seriální korelace [35]

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} (x_i - \bar{X})(x_{i+k} - \bar{X})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \quad \text{pro } k < n \quad /D.2/$$

kde n je počet členů posloupnosti, k je vzdálenost mezi členy (posunutí), \bar{X} je aritmetický průměr hodnot členů posloupnosti $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Pokud jsou x_i nezávislé, má pro dané k veličina $r_k \sqrt{n}$ pro $n \rightarrow \infty$ limitní rozdělení $N(0,1)$. Hypotézu o nulovosti seriální korelace zamítáme pokud $\left| \frac{r_k \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_k^2}} \right| > t_\alpha(n-2)$, kde

$t_\alpha(n-2)$ je kritická hodnota Studentova rozdělení t s $n-2$ stupni volnosti [38]. Pro velká n a malá r_k lze použít podmínku $|r_k \sqrt{n}| > t_\alpha(n)$. Zároveň pro dostatečně velká n platí $t_\alpha(n) \approx u_p$, kde u_p je p -kvantil normálního rozdělení $N(0,1)$. Tabulka D.3 shrnuje hodnoty $100r_k$ pro $k=1, 2, \dots, 32$, pro pět posloupností délky 10 000, označených A, B, C, D a E. Kritické hodnoty Studentova rozdělení t s 10 000 stupni volnosti jsou pro $\alpha = 0,95$ a $\alpha = 0,99$ $t_{0,95}(10000) \approx 1,644$ a $t_{0,99}(10000) \approx 2,326$. Hodnoty koeficientů korelace r_k pro žádné k nenaznačují významnější statistickou závislost.

Posloupnost hodnot r_k se nazývá korelogram. Na obrázku D.2 je graficky znázorněn korelogram pro posloupnost A.

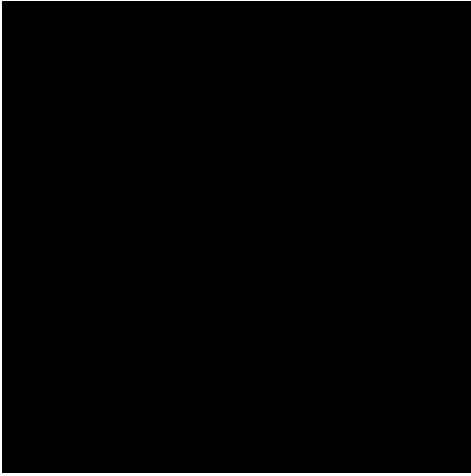


Obr. D.2: Korelogram pro posloupnost A

	100 r_k pro posloupnost A	100 r_k pro posloupnost B	100 r_k pro posloupnost C	100 r_k pro posloupnost D	100 r_k pro posloupnost E
1	-0.98	-0.26	-0.22	-1.89	1.14
2	-1.80	-0.20	0.54	-0.34	-0.22
3	-0.40	-0.84	1.33	0.47	0.07
4	0.41	-0.42	1.14	0.71	-0.89
5	-0.89	2.15	1.65	-1.12	0.59
6	0.09	-2.32	-0.85	0.02	0.26
7	-2.22	-0.88	0.75	0.68	-1.83
8	-0.69	0.29	0.72	-0.49	1.32
9	-0.19	-0.47	-0.53	0.84	0.39
10	0.77	0.45	-1.61	-0.72	0.02
11	-1.29	-0.37	1.45	0.62	2.98
12	-0.82	-0.64	0.52	-0.68	0.07
13	-0.44	-0.44	-0.95	-1.79	0.62
14	0.88	-1.24	-0.95	-2.11	0.82
15	-0.24	-1.15	1.55	-0.53	-0.08
16	1.35	-0.51	-0.14	2.45	-0.87
17	-1.47	1.49	-1.22	-0.32	-0.18
18	0.03	1.30	0.25	0.66	0.92
19	-1.02	0.60	1.27	1.41	1.47
20	1.35	-0.36	2.02	1.31	-1.12
21	1.00	0.16	-0.34	-0.85	-2.52
22	-0.43	0.06	1.90	-0.60	0.21
23	-0.88	-0.42	1.02	-0.70	1.90
24	-1.17	-0.06	-0.28	-0.37	2.37
25	-0.74	0.82	-1.10	2.41	1.98
26	0.20	-0.41	2.77	-0.08	0.28
27	0.57	1.37	-1.19	0.93	0.23
28	0.34	1.18	-0.42	-0.68	-0.84
29	-2.00	0.37	-1.10	-1.42	0.11
30	-0.75	0.84	0.54	-1.80	0.62
31	-0.77	-1.68	-0.64	0.27	-0.92
32	0.64	-0.47	-0.18	-2.06	1.23

Tab. D.3: Hodnoty korelogramu

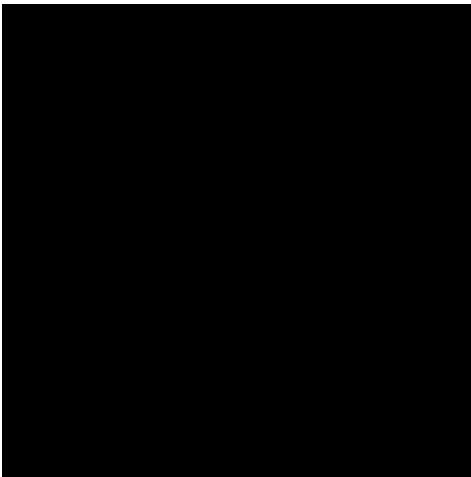
Dobrou představu o závislosti mezi členy posloupnosti dává grafické znázornění poloh bodů o souřadnicích (x_i, x_{i+k}) v rovině (scatter plot, lag plot) [11, 64]. Některé typy závislostí, jiným způsobem těžko odhalitelné, se projeví jako snadno rozpoznatelné útvary.



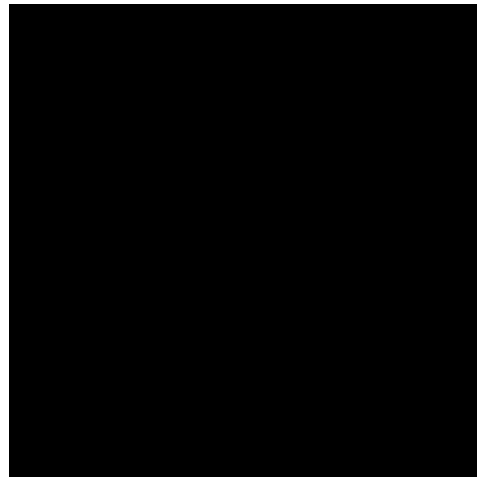
$k=1$



$k=2$



$k=3$



$k=4$



$k=5$



$k=6$

Obr. D.3: Grafy (x_i, x_{i+k})

Grafy na obrázku D.3 byly vytvořeny pro hodnoty $k=1, 2, 3, 4, 5$ a 6 pro posloupnost délky 5000 . Na žádném z prezentovaných grafů nejsou patrné struktury naznačující nějakou formu závislosti. Závislost nebyla pozorována ani na dalších grafech pro $k=7, 8, \dots, 512$.

Za jeden z nejvýznamnějších testů je pokládán spektrální test, popsáný v [41]. Test je založen na aplikaci Fourierovy transformace, zobecněné pro funkce, definované na konečných množinách. Test analyzuje celou periodu posloupnosti, čímž spojuje vlastnosti teoretických a empirických testů. Získané hodnoty d_k je možné interpretovat jako maximální vzdálenost rovnoběžných nadrovin v n rozměrném prostoru na nichž leží body o souřadnicích (x_1, x_2, \dots, x_n) , $(x_2, x_3, \dots, x_{n+1})$, $(x_3, x_4, \dots, x_{n+2})$. Čím jsou hodnoty d_k menší, tím rovnoměrněji je prostor pokryt. Normalizované výsledky spektrálního testu publikované v [26] pro $k = 2 \dots 8$ shrnuje tabulka D.4.

k	S_k
2	0.75
3	0.4
4	0.6
5	0.6
6	0.76
7	0.35
8	0.4

Tab. D.4: Výsledky spektrálního testu

Pro výsledné hodnoty $S_k = \frac{d_k^*}{d_k}$, kde d_k^* je absolutní dolní mez pro d_k , platí $0 \leq S_k \leq 1$. Hodnoty S_k blízké jedné naznačují dobré vlastnosti generátoru, z hodnot S_k blízkých nule vyplývají silné korelace v generované posloupnosti. Srovnáním s výsledky spektrálního testu publikovanými v [26] pro řadu dalších generátorů lze usuzovat, že použitý generátor je průměrné kvality.

Shrnutí výsledků testů primárního generátoru

Výsledky provedených základních testů naznačují, že při generování několika desítek náhodných proměnných a řádově desítkách miliónů simulací Monte Carlo lze jako primární generátor rovnoměrného rozdělení použít přímo kongruenční generátor implementovaný v překladačích jazyka Borland Pascal 7 a Delphi 3. Tento závěr potvrzuje i dlouhodobé používání programů Anthill, M-Star, LoadCom, ResCom a DamAc pro určování spolehlivosti konstrukcí metodou SBRA, během něhož byly metodou Monte Carlo úspěšně řešeny stovky různých konkrétních úloh.

Testování generátoru obecného diskrétního a po částech rovnoměrného rozdělení

Pro aproximaci rozdělení náhodných veličin jsou v rámci metody SBRA používána obecná diskrétní rozdělení. Tato rozdělení lze efektivně generovat metodou inverzní transformace. V případech, kdy může být na závadu diskrétní charakter generovaného rozdělení, lze použít aproximaci po částech rovnoměrným rozdělením, které lze generovat obdobným způsobem jako rozdělení předchozí. Obou rozdělení lze použít jak pro aproximaci teoretických rozdělení, popsanych parametrickým způsobem, tedy definiční funkcí a hodnotami jejich parametrů, tak i pro aproximaci rozdělení mnoha "reálných" veličin, která neodpovídají žádnému ze známých teoretických rozdělení a pro jejichž popis je vhodnější neparametrická forma.

Jelikož většina prakticky používaných náhodných veličin nabývá pouze hodnot z omezeného intervalu $[a,b]$, jsou i aproximující rozdělení definována na omezeném intervalu. To umožňuje tabelaci hodnot kvantilové funkce, čehož je využito při implementaci velmi rychlého algoritmu generátoru na principu inverzní transformace.

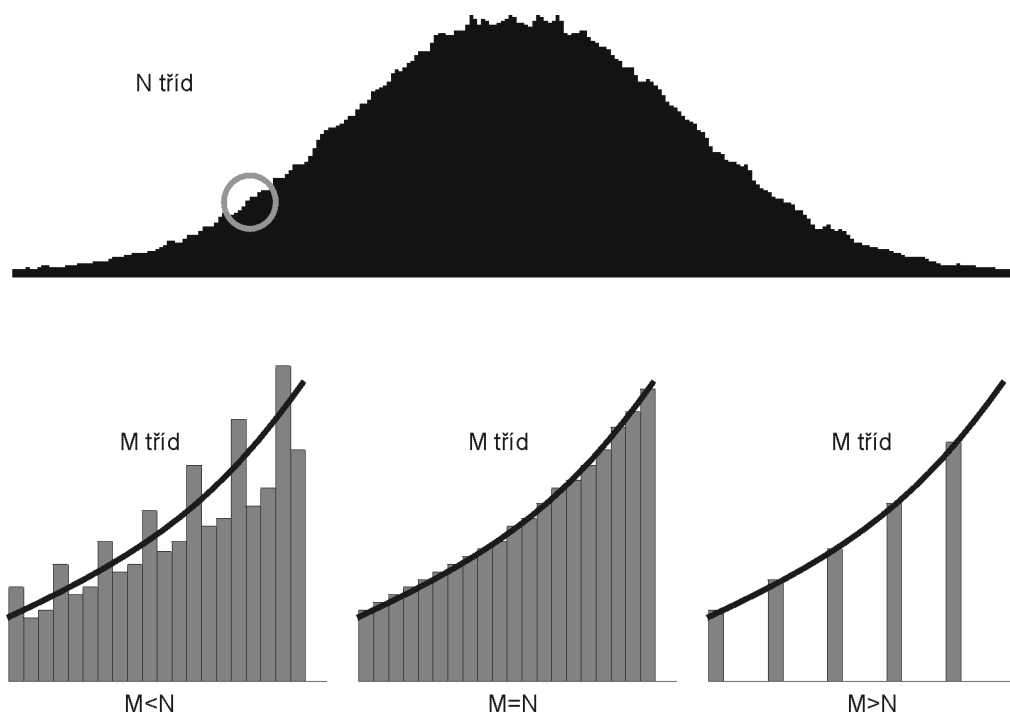
Posouzení kvality aproximace

Pro posouzení kvality aproximace daného rozdělení rozdělením diskrétním nebo po částech rovnoměrným byl použit χ^2 -test dobré shody [41], sloužící pro ověření hypotézy, že generované rozdělení je výběrem z rozdělení požadovaného. Test byl proveden následujícím způsobem. Nejprve bylo vygenerováno n hodnot z testovaného rozdělení. Z těchto hodnot byl vytvořen histogram O se zvoleným počtem tříd N . Dále byl vytvořen referenční histogram E se shodným počtem tříd N , obsahující v jednotlivých třídách očekávané hodnoty četností. S využitím obou histogramů byla vypočtena statistika χ^2 , podle vztahu

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \quad /D.3/$$

Počet stupňů volnosti rozdělení χ^2 je $v = N - 1$. Podmínky pro nezamítnutí hypotézy jsou popsány výše.

Při posuzování aproximace diskrétním rozdělením je třeba věnovat pozornost volbě počtu tříd histogramu, použitého pro χ^2 -test. Jako optimální se jeví použití histogramu o stejném počtu tříd jako má aproximující rozdělení. Při použití menšího počtu tříd histogramu dochází v obecném případě k interferencím mezi počty tříd histogramu a testovaného rozdělení, při nichž jsou jednotlivé třídy obsazovány nerovnoměrně a výsledný tvar histogramu neodpovídá generovanému rozdělení.



Obr. D.4: Vliv počtu tříd na tvar histogramu v případě diskrétního rozdělení

Tento jev nenastává v případě, kdy je počet tříd generovaného rozdělení celistvým násobkem počtu tříd histogramu. Pokud je počet tříd histogramu vyšší než počet tříd rozdělení, zůstávají některé třídy neobsazeny a výsledný tvar histogramu opět neodpovídá generovanému rozdělení. Popsané situace ilustruje obrázek D.4, kde N je počet tříd generovaného diskrétního rozdělení a M je počet tříd histogramu.

Při posuzování aproximace po částech rovnoměrným rozdělením lze při zařizování generovaných hodnot použít libovolný počet tříd histogramu, protože vzhledem ke spojitému charakteru testovaného rozdělení nedochází k nerovnoměrnému obsazování tříd jako v předchozím případě.

Pro provedení χ^2 -testu bylo zvoleno normální rozdělení $N(0,1)$, omezené na interval $[-3,0; 3,0]$. Toto rozdělení bylo aproximováno jak rozdělením diskrétním, tak i po částech rovnoměrným. Pro generování obou rozdělení bylo využito stejné tabulky hodnot kvantilové funkce, která obsahovala 256 hodnot. Soubory dat obsahující posloupnosti realizací testovaných proměnných a odpovídající histogramy byly vygenerovány pomocí programu Anthill. Počet tříd vytvořených histogramů byl 64, 70, 256, 512, 1000 a 1024. Test byl pro každé rozdělení a každý počet tříd opakován pětkrát. Výsledky jsou shrnuty v následujících tabulkách D.5 až D.10. Znaménko + značí nezamítnutí hypotézy (pravděpodobnost 0,1 až 0,9), +? značí "možné" zamítnutí hypotézy (pravděpodobnost 0,05 až 0,1 nebo 0,9 až 0,95), -? značí "pravděpodobné" zamítnutí hypotézy (pravděpodobnost 0,01 až 0,05 nebo 0,95 až 0,99), - značí zamítnutí hypotézy (pravděpodobnost menší než 0,01 nebo větší než 0,99), viz výše.

64 tříd	Rozdělení			
Test	Diskrétní		Po částech rovnoměrné	
1	60,70	+	71,05	+
2	87,62	+	94,42	-?
3	60,32	+	73,15	+
4	69,60	+	75,18	+
5	84,22	+?	73,45	+
Výsledek	+		+	

Tab. D.5: Hodnoty χ^2 – 64 tříd

70 tříd	Rozdělení			
Test	Diskrétní		Po částech rovnoměrné	
1	1820	-	64,95	+
2	1895	-	55,52	+
3	1862	-	93,92	-?
4	1860	-	66,92	+
5	1741	-	66,56	+
Výsledek	-		+	

Tab. D.6: Hodnoty χ^2 – 70 tříd

256 tříd	Rozdělení			
Test	Diskrétní		Po částech rovnoměrné	
1	283,91	+	237,24	+
2	218,46	+	274,67	+?
3	277,22	+?	212,11	+
4	220,00	+	229,15	+
5	230,34	+	277,39	+
Výsledek	+		+	

Tab. D.7: Hodnoty χ^2 – 256 tříd

512 tříd	Rozdělení			
Test	Diskrétní		Po částech rovnoměrné	
1	101803	-	639,22	-
2	101837	-	667,71	-
3	101783	-	662,23	-
4	101822	-	644,26	-
5	101796	-	661,68	-
Výsledek	-		-	

Tab. D.8: Hodnoty χ^2 – 512 tříd

1000 tříd	Rozdělení			
Test	Diskrétní		Po částech rovnoměrné	
1	2923556	-	1363	-
2	2923494	-	1276	-
3	2923450	-	1331	-
4	2923370	-	1362	-
5	2923653	-	1247	-
Výsledek	-		-	

Tab. D.9: Hodnoty χ^2 – 1000 tříd

1024 tříd	Rozdělení			
Test	Diskrétní		Po částech rovnoměrné	
1	3017005	-	1349	-
2	3017383	-	1348	-
3	3017247	-	1443	-
4	3017151	-	1310	-
5	3017059	-	1381	-
Výsledek	-		-	

Tab. D.10: Hodnoty χ^2 – 1024 tříd

Hodnoty uvedené v tabulkách D.5 až D.10 potvrzují předpokládané výsledky. Obě rozdělení lze pokládat za aproximace požadovaného normálního rozdělení

v případech, kdy počet tříd výstupních histogramů je menší než počet tříd histogramů definujících aproximující rozdělení. To platí zde v případě 64 a 256 tříd. Pro 70 tříd je diskrétní rozdělení zamítnuto z důvodu interference mezi počty tříd, vysvětlené výše. Pokud je počet tříd výstupních histogramů větší, (zde 512, 1000 a 1024 tříd), lze pozorovat rostoucí odchylky od požadovaného rozdělení u rozdělení po částech rovnoměrného, dané náhradou skutečných rozdělení uvnitř jednotlivých tříd rovnoměrnými rozděleními. U rozdělení diskrétního jsou odchylky výrazně větší, což je způsobeno reprezentací rozdělení uvnitř jednotlivých tříd pouze jednou hodnotou a tedy velkým množstvím neobsazených tříd výstupních histogramů.

Použitá literatura

1. AISC: *Allowable Stress Design Specification for Structural Steel Buildings*. American Institute of Steel Construction. AISC, Chicago, 1989.
2. AISC: *Load and Resistance Factor Design Specification for Structural Steel Buildings*. AISC, Chicago, 1993.
3. ANDĚL, J.: *Matematická statistika*. SNTL, Praha, 1978.
4. ANDĚL, J.: *Statistické metody*. Matfyzpress, Praha, 1998.
5. ANGOT, A.: *Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry*. SNTL, Praha 1960.
6. BOBEK, M., HAŠKA, J., SERBA, I., LUKEŠ, M.: *Analogové počítače*. SNTL, Praha 1982.
7. BREITUNG, K.: *Asymptotic Approximation for Multinormal Integrals*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, USA, No. 3, 1984.
8. BROZZETTI, J., OTERO, V.: *Reliable database of statistical properties of various structural steel products*. CTICM, 2000.
9. CABRAL, S. V. DE S., KATAFYGIOTIS, L. S.: *Improved adaptive importance sampling procedure for reliability estimation*. International Conference On Monte Carlo Simulation, Monte Carlo, 2000.
10. CAN/CSA-S16.1-M89. *Limit States Design Of Steel Structures*. CSA, Canada, 1989.
11. CHAMBERS, J., CLEVELAND, W., KLEINER, B., TUKEY, P.: *Graphical Methods for Data Analysis*, Wadsworth, 1983.
12. CHEN, W. F., SOHAL, I.: *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995.
13. COMPUTATIONAL SCIENCE EDUCATION PROJECT. *Random Number Generators*. <http://csep1.phy.ornl.gov/csep/RN/RN.html>, 1996.
14. COMPUTATIONAL SCIENCE EDUCATION PROJECT. *Introduction to Monte Carlo Methods*. <http://csep1.phy.ornl.gov/csep/MC/MC.html>, 1996.
15. ČSN 050 110 – 1949: *Navrhování ocelových konstrukcí pozemního stavitelství*. ÚNM, Praha, 1949.
16. ČSN 73 1401: *Navrhování ocelových konstrukcí*. ČSNI, Praha, 1995.
17. DEÁK, I.: *Random number generators and simulation*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990.
18. DIN 18800 – 1990. *Stahlbau*.
19. DITLEVSEN, O.: *Generalized Second Moment Reliability Index*. Journal of Structural Mechanics, USA, No. 4, 1979.
20. DOSTÁL, Z.: *Lineární algebra*. VŠB-TU, Ostrava, 2001.
21. DOSTÁL, Z., PRAKS, P.: *Numerické aspekty rozšíření SBRA na systémy*. Sborník konference Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2001.
22. DUMMER, R. M.: *Introduction to statistical science*. VŠB-TU Ostrava, 1998.
23. EGERMAYER, F., BOHÁČ, M.: *Statistika pro techniky*. SNTL, Praha, 1984.
24. ELZAS, M. S., ÖREN, T. I., ZEIGLER, B. P.: *Modelling and Simulation Methodology*. North-Holland, 1989.

- 25.EN 1990, EUROCODE 0. *Basis of design*.
- 26.ENTACHER, K.: *A collection of classical pseudorandom number generators with linear structures*. <http://random.mat.sbg.ac.at/results/karl/server/server.html>, 2000.
- 27.ENTACHER, K., SCHELL, T.: *From "Pseudo" to "Quasi"*. International Conference On Monte Carlo Simulation, Monte Carlo, 2000.
- 28.EVANS, M., HASTING, N., PEACOCK, V.: *Statistical distributions*. John Wiley & sons, 2000.
- 29.FABIAN, F., KLUIBER, Z.: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*. Prospektrum, Praha, 1998.
- 30.GUŠTAR, M.: *Comparison of Discrete and Piecewise Uniform Distribution used for Statistical Distributions Generation in Monte Carlo Simulation Programs*. MCS2000, Monte Carlo, Monaco, 2000.
- 31.HALDAR, A., MAHADEVAN, S.: *Probability, reliability and statistical methods in engineering design*. John Willey & Sons, 2000.
- 32.HALDAR, A., MAHADEVAN, S.: *Reliability assessment using stochastic finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2000.
- 33.HAVRDA, J., MÍKA, S., PŘIKRYL, P.: *Numerické metody a matematická statistika*. ČVUT, 1981.
- 34.HURT, J.: *Simulační metody*. SPN Praha, 1982.
- 35.HUŠEK, R., LAUBER, J.: *Simulační modely*. SNTL, ALFA, Praha, 1987.
- 36.CHAMBERS, J., CLEVELAND, W., KLEINER, B., TUKEY, P.: *Graphical Methods for Data Analysis*. Wadsworth, 1983.
- 37.JANNSON, B.: *Random number generators*. Almquist Wiskell, Stockholm, 1966.
- 38.JAROŠ, F., PAVLÍK, J., TURZÍK, D., VESELÝ, P.: *Pravděpodobnost a statistika*. VŠCHT Praha, 1994.
- 39.KALA, Z.: *Aproximační a zdokonalené simulační metody*. Sborník konference Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2001.
- 40.KETTER, R. L., PRAWEL, S. P. JR.: *Modern methods of engineering computation*. McGraw-Hill, 1969.
- 41.KNUTH, D. E.: *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, 1969.
- 42.KŘÍSTEK, V., MAREK, P., PIRNER, M.: *The Relation of the Transformation Models and Reliability Conditions in Structural Steel Design*. Stavebnický časopis 1, Bratislava, 1984.
- 43.LEON-GARCIA, A.: *Probability and Random Processes for Electrical Engineering*. Addison-Wesley, 1994.
- 44.LIKEŠ, J.: *Základní statistické tabulky*. SNTL Praha, 1978.
- 45.LIKEŠ, J., MACHEK, J.: *Matematická statistika*. SNTL Praha, 1983.
- 46.LIKEŠ, J., MACHEK, J.: *Počet pravděpodobnosti*. SNTL Praha, 1981.
- 47.LOKAJ, A.: *Ověření spolehlivosti taženého dřevěného prvku oslabeného vlivem povětrnostní eroze metodou SBRA*. Problémy modelování, FAST VUT Brno, 2000.
- 48.LRFD: *Standard for Engineering Wood Structures*. Public ballot draft, ASCE, Design of Engineered Wood Structures Committee, 1994.

49. MACK, Y. P.: *Statistical Issues On Simulation Techniques In Structural Engineering*. International Colloquium Euro-SiBRAM'2002, Praha, 2002.
50. MAREK, P., BROZZETTI, J., GUŠTAR, M., EDITORS: *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*. Academia, Praha, 2001.
51. MAREK, P., DOSTÁL, Z., GUŠTAR, M., FEGAN, G.: *Issues related to the Application of SBRA in the Reliability Assessment of Structural Systems*. ICOSSAR '01, California, USA, 2001.
52. MAREK, P., GUŠTAR, M.: *Posouzení kombinace odezev konstrukce na zatížení*. Pozemní stavby 2, Praha, 1989.
53. MAREK, P., GUŠTAR, M.: *Vybrané příklady aplikace programu RESCOM*. VTS Conference, Hustopeče, 1988.
54. MAREK, P., GUŠTAR, M., ANAGNOS, T.: *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995.
55. MAREK, P., GUŠTAR, M., BATHON, L.: *Tragwerksbemessung. Von deterministischen zu probabilistischen Verfahren*. Academia, Praha, 1998.
56. MAREK, P., GUŠTAR, M., DE ALMEIDA, A.: *From Partial Factors Method to Simulation-Based Reliability Assessment Concept in Structural Design*. ESREL'97, Lisboa, Portugalsko, 1997.
57. MAREK, P., GUŠTAR, M., TIKALSKY, P.: *Monte Carlo simulation = tool for better understanding of LRFD*. Journal of Structures Div. ASCE 5, New York, USA, 1993.
58. MAREK, P., GUŠTAR, M., VENUTI, W. J.: *Design of Wood Structures – Probability Considerations*. Wood design and construction seminar – A technology update, San Jose State University, USA, 1994.
59. MAREK, P., VENUTI, W. J., GUŠTAR, M.: *Combinations of Design Tensile Yield Stresses in Build-up Sections*. Construction Métallique 4, Paris, Francie, 1990.
60. MARTÍNEK, V.: *Aplikace simulačních metod ve spolehlivosti*. Diplomová práce, UM FSI VUT, Brno, 2000.
61. MORGAN, C. L., WAITE, M.: *8086/8088 Microprocessor primer*. McGraw-Hill, 1982.
62. MRÁZIK, A.: *Teória spolehlivosti ocelových konstrukcí*. Veda, Bratislava 1987.
63. NĚMEC, L., MAREK, P.: *Zatížení sněhem a větrem*. Stavební obzor, ČVUT Praha, č.10, 2000.
64. NIST / SEMATECH: *e-Handbook of Statistical Methods*. <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/index.htm>, 2002.
65. ONDRÁČEK, E., JANÍČEK, P.: *Výpočtové modely v technické praxi*. SNTL Praha, 1990.
66. ÖKTEN, G.: *Contribution to the theory of Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo methods*. Claremont Graduate School, 1997.
67. PAGE, E. H.: *Simulation Modeling Methodolgy: Principles and Etiology of Decision Support*. Dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 1994.
68. PAPOULIS, A.: *Probability Random variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1991.

69. POPELA, P.: *An Object-oriented approach to multistage stochastic programming*. Ph.D. Thesis, Charles University, Prague 1998.
70. POPELA, P.: *Generátory náhodných čísel a jejich testování*. Výzkumná zpráva, GAČR 103/94/0562), Brno, 1996.
71. PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes in C++. The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. 1988.
72. PUSTKA, D.: *Reliability analysis of statically indeterminate steel frame*. International Colloquium Euro-SiBRAM'2002, Praha, 2002.
73. RAND CORPORATION: *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates*. RAND Corporation, 1995.
74. RÉNYI, A.: *Dialogy o matematice*. Mladá fronta, Praha, 1980.
75. RÉNYI, A.: *Teorie pravděpodobnosti*. Academia, 1972.
76. ROSEN, K.: *Elementary number theory and its application*. Addison Wesley, 1988.
77. SILVERMAN, B. W.: *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman and Hall, 1986.
78. SMETANA, C. A KOLEKTIV: *Praktická elektroakustika*. SNTL/ALFA, Praha, 1981.
79. SURESH, S.: *Fatigue of Materials*. Cambridge University Press, 1998.
80. TEPLÝ, B., NOVÁK, D.: *Spolehlivost stavebních konstrukcí*. CERM, Brno, 1999.
81. VIRIUS, M.: *Aplikace matematické statistiky*. ČVUT Praha, 1989.
82. VLK, M.: *Uplatnění metody SBRA při řešení únavových problémů*. Konference Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2001
83. VONDRÁK, I., ŠALOUN, P.: *Objektově orientované programování*. VŠB, Ostrava, 1993.
84. WEN, Y. K.: *Structural load modeling and combination for performance and safety evaluation*. Elsevier, 1990.
85. WOLINSKI, S.: *Teaching Reliability Concepts in Civil Engineering Using Simulation Techniques*. International Colloquium Euro-SiBRAM'2002, Praha, 2002.
86. WOOD, L. W.: *Behavior of wood under continued loading*. Engineering News-Record, 1947.
87. ZEIGLER, B. P.: *Modeling and simulation*. J. Willey, 1996.

Vybrané publikace

Knižní publikace

- Simulation Based Reliability Assessment For Structural Engineers*. CRC Press, Boca Raton, USA, 1995. (P. Marek, M. Guštar, T. Anagnos)
- Tragwerksbemessung. Von deterministischen zu probabilistischen Verfahren*. Academia, Praha, 1998. (P. Marek, M. Guštar, L. Bathon)
- Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation. Basics, Exercises, Software*. ITAM CAS, Praha, 2000. (editor P. Marek, J. Brozzetti, M. Guštar)

Práce publikované v odborných časopisech a příspěvky na konferencích

2002

- Random variables representation in simulation techniques*. Kolokvium Euro-SiBRAM'2002, Praha, 2002. (M. Guštar)
- Loadings representation in SBRA method*. Kolokvium Euro-SiBRAM'2002, Praha, 2002. (M. Guštar)
- Náhodné veličiny v simulačních metodách*. Konference Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2002. (M. Guštar)
- Alternativas para evaluación de la confiabilidad en el diseno estructural*. Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil, No.1, Vol.2, Universidad de Puerto Rico, 2002. (P. Marek, M. Guštar, M. Sánchez-Silva)

2001

- Issues related to the Application of SBRA in the Reliability Assessment of Structural Systems*. ICOSAR '01, California, USA, 2001. (P. Marek, Z. Dostál, M. Guštar, G. Fegan)
- Issues related to introduction of qualitatively new reliability assessment concepts in structural design codes*. Hong Kong, 2001. (P. Marek, M. Guštar)
- SBRA – method for probabilistic reliability assessment*. MOSIS01, Hradec nad Moravicí, 2001. (M. Guštar)
- Long-term monitoring and evaluation of strain history*. EAN2001, Tábor, 2001. (P. Marek, M. Guštar)
- Omezené histogramy a SBRA*. Konference Spolehlivost konstrukcí, Ostrava, 2001. (M. Guštar)

2000

- Comparison of Discrete and Piecewise Uniform Distribution used for Statistical Distributions Generation in Monte Carlo Simulation Programs*. Konference MCS2000, Monte Carlo, Monaco, 2000. (M. Guštar)
- Generování náhodně proměnných veličin v metodě Monte Carlo*. Konference Spolehlivost konstrukcí Ostrava, 2000. (M. Guštar)

1999

Codified Design of Steel Structures using Monte Carlo Techniques. Constructional Steel Research – special issue, USA, 1999. (P. Marek, M. Guštar, T. Anagnos)

1998

Assessing Structural Reliability: From a Deterministic to a Probabilistic Approach. Conference SEWC'98. San Francisco, USA, 1998. (P. Marek, M. Guštar, T. Anagnos)

Simulation-Based Reliability Assessment = Tool For Efficient Steel Design. Structural Steel World Conference, San Sebastian, Španělsko, 1998. (M. Krejsa, P. Marek, M. Guštar)

Transition from Partial Factors Method to Simulation Based Reliability Assessment in Structural Design. Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, USA, 1998. (P. Marek, M. Guštar, K. Permaul)

1997

Kvalitativní vývoj posuzování spolehlivosti ocelových konstrukcí. 18. Česko-Slovenská mezinárodní konference Ocelové konstrukce a mosty '97, ČSOK, Brno, 1997. (P. Marek, M. Guštar, M. Vlk)

Evaluation par une methode de Monte-Carlo de la fiabilite de structures metalliques soumises a un incendie. Construction Metallique 2, Paris, Francie, 1997. (P. Marek, M. Guštar, A. De Almeida)

Od metody dílčích součinitelů k pravděpodobnostnímu posudku spolehlivosti konstrukcí. Stavební obzor 2, Praha, 1997. (P. Marek, M. Guštar)

From Partial Factors Method to Simulation-Based Reliability Assessment Concept in Structural Design. ESREL'97, Lisboa, Portugalsko, 1997. (P. Marek, M. Guštar, A. De Almeida)

Sensitivity Analysis in Simulation-Based Reliability Assessment of a Structure. ICOSSAR '97, Kyoto, Japonsko, 1997. (P. Marek, M. Guštar, B. Teplý, D. Novák, Z. Keršner)

1996

Transition from Partial Factors Method to Simulation Based Reliability Assessment in Structural Design. 7th ASCE Specialty Conference "Probabilistic Mechanics and Structural Reliability", Worcester, USA, 1996. (P. Marek, M. Guštar)

1995

Probability based design of structures using Monte Carlo simulations and modern PCs as a tool. 10th ASCE Engineering Mechanics Specialty Conference, ASCE, Boulder, Colorado, USA, 1995. (P. Marek, M. Guštar, T. Anagnos)

Monte Carlo simulation in designer's everyday work. Second congress on computing in civil engineering, ASCE Technical council on computing practices. Atlanta, USA, 1995. (P. Marek, M. Guštar, T. Anagnos)

Alternative probability based assessment of structures using Monte Carlo simulations as a tool. CERRA-ACASP7, Paris, Francie, 1995. (P. Marek, M. Guštar, T. Anagnos)

1994

Design of Wood Structures – Probability Considerations. Wood design and construction seminar – A technology update, San Jose State University, USA, 1994. (P. Marek, M. Guštar, W. J. Venuti)

Alternativní metoda posuzování stavebních konstrukcí. Konference o nových požadavcích na konstrukce a jejich spolehlivost, ČVUT, 1994. (P. Marek, M. Guštar)

Simulace Monte Carlo – účinný pomocník při posuzování spolehlivosti ocelových konstrukcí. 17. Česko-Slovenská konference o ocelových konstrukcích, Bratislava, Slovensko, 1994. (P. Marek, M. Guštar)

1993

Monte Carlo simulation = tool for better understanding of LRFD. Journal of Structures Div. ASCE 5, New York, USA, 1993. (P. Marek, M. Guštar, J. P. Tikalsky)

1992

Simulace Monte Carlo = nástroj pro posuzování spolehlivosti. Mezinárodní konference o poruchách stavebních konstrukcí, Praha, 1992. (P. Marek, M. Guštar)

Aplikace simulačních technik při navrhování konstrukcí. Konference Mezní stavy a poruchy konstrukcí, Brno, 1992. (P. Marek, M. Guštar)

Analýza kombinace zatížení pomocí programu RESCOM. Konference TU Košice, Slovensko, 1992. (P. Marek, M. Guštar)

1990

Combinations of Design Tensile Yield Stresses in Build-up Sections. Construction Métallique 4, Paris, Francie, 1990. (P. Marek, W. J. Venuti, M. Guštar)

Analýza kombinací zatížení pomocí simulace Monte Carlo. Konference o zatížení ocelových konstrukcí, Pardubice, 1990. (P. Marek, M. Guštar)

K určení součinitele spolehlivosti materiálů metodou Monte Carlo. Stavebnický časopis 10, Bratislava, Slovensko, 1990. (P. Marek, M. Guštar)

Load Combinations. Poster session, AISC Conference, Kansas City, USA, 1990. (P. Marek, W. J. Venuti, M. Guštar)

1989

Posouzení kombinace odezev konstrukce na zatížení. Pozemní stavby 2, Praha, 1989. (P. Marek, M. Guštar)

1988

Vybrané příklady aplikace programu RESCOM. Hustopeče VTS Konference, 1988. (P. Marek, M. Guštar)